تمارين و مسائل محلولة

الجزء 1

- التهايات و الاستمرارية
- الاشتقاق
- الدوال الأصلية
- الدوال الأسية
- الدوال اللوغاريتمية
- المتتاليات العددية
- الحساب التكاملي

سلسلة مدرستي

الرّياضيّات

3AS

السنة الثالثة من التعليم الثانوي

شعبة العلوم التجريبية

- مراجعة الدروس
- تمارين بحلول مفصلة
- مواضيع نموذجية لامتحان الباكالوريا مع حلولها

منشورات الشهاب

تمارين و مسائل محلولة

في الرّياضيّات

السّنة الثالثة من التعليم الثانوي
شعبة العلوم التجريبية

الطبعة الثانية منقحة

الجزء 1

- النهايات و الاستمرارية
- الاشتقاق
- الدوال الأصلية
- الدوال الأسية
- الدوال اللوغاريتمية
- المتتاليات العددية
- الحساب التكاملي

رابح بنّاني
مفتّش التّربية و التّكوين

وحسن أوديع
مفتّش التّربية و التّكوين

العربي داود
مفتّش التّربية و التّعليم الأساسي

منشورات الشّهاب

الحجم : 27 x 18,5 - عدد الصفحات : *160*
ردمك : 9 - 588 - 63 - 9961
الإيداع القانوني : 2419 - 2007
منشورات الشهاب : 10، نهج ابراهيم غرفاء، باب الواد، الجزائر 16009
site internet : www.chihab.com - E-mail : chihab@chihab.com

أنجز طبعه على مطابع عمار قرفي – باتنة

مقدمة

هذا الكتاب في الرياضيات موجه إلى تلاميذ السنة الثالثة من التعليم الثانوي الذين يدرسون بصفة خاصة في شعبة العلوم التجريبية، كما يمكن لتلاميذ الشعب العلمية و التكنولوجية الأخري استغلاله.

إن مضامينه مطابقة للمنهاج الرسمي الذي شرع في تطبيقه ابتداء من سبتمبر 2007 و المنجز في إطار إصلاح المنظومة التربوية، و هو يغطي في جزئه الأول مضامين التعلم المتعلقة بميدان التحليل.

يعتبر هذا الكتاب وسيلة تعليمية يسمح استعمالها بتمديد العمل المنجز في القسم و بتدعيم المكتسبات و التدريب على العمل الفردي.

يندرج هذا الإصدار في تصورٍ خاص و مميز للتعلم، فهو يهدف إلى إعطاء الفرصة للتلميذ لممارسة و تعلم البرهنة و تحرير حلول بصفة سليمة، و هذا ما يحضره لمختلف عمليات التقويم خلال السنة الدراسية و خاصة الاستعداد الجيد لامتحان شهادة البكالوريا.

يتركب هذا الجزء من 7 أبواب، يشمل كل باب الأجزاء التالية :

– معارف متمثلة في تعاريف و مبرهنات و نتائج و خواص و ملاحظات، مصاغة بصفة دقيقة و موجزة.

– طرائق مطبقة في وضعيات وجيهة، مرفقة بحلول محررة بتعبير رياضي سليم، يدركه التلميذ و يستعمله في وضعيات مماثلة.

– تمارين بحلول نموذجية توظف معارف و طرائق مدروسة، تبين فعاليتها.

تعتبر هذه التمارين نماذج يمكّن التمرن عليها كثيرا من التحكم في المفاهيم و الطرائق، و تذليل الصعوبات التي تتضمنها.

– تمارين و مسائل مقترحة للحل، يتدرب عليها التلميذ. و تسمح مواجهة هذه الوضعيات بتشخيص الصعوبات العنيدة و معالجتها في الوقت المناسب.

أدرجت في الجزء الأخير من هذا الكتاب حلول موجزة للتمارين و المسائل المقترحة في نهاية كل باب، يطلع عليها التلميذ بعد إنجازه لمحاولات قصد مقارنة حله و التحقق من صحته ثم تعديل و تصحيح أخطائه. إن هذا العمل يسمح له بتحسين مردوده و التحكم في الكفاءات القاعدية و الكفاءات الرياضية المصرح بها في المنهاج.

المؤلفون

فهرس الجزء الأول

محتويات الجزء الثاني : 1 - التحليل التوفيقي. 2 - الإحتمالات. 3 - الأعداد المركبة.
4 - التشابهات المستوية المباشرة. 5 - الهندسة في الفضاء.



I - النهايات

• نهايات مجموع أو جداء أو حاصل قسمة دالتين

f و g دالتان عدديتان، α عدد حقيقي أو $-\infty$ أو $+\infty$. ℓ و ℓ' عددان حقيقيان
الجداول التالية تقدم المبرهنات المتعلقة بنهايات الدوال المقررة في السنة الثالثة من التعليم الثانوي.

إذا كانت $\lim_{x\to\alpha} f(x)$ هي	و $\lim_{x\to\alpha} g(x)$ هي	فإن $\lim_{x\to\alpha} (f(x)+g(x))$ هي
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	لا توجد نتيجة يمكن النص عليها.

إذا كانت $\lim_{x\to\alpha} \lvert f(x)\rvert$ هي	و $\lim_{x\to\alpha} \lvert g(x)\rvert$ هي	فإن $\lim_{x\to\alpha} \lvert f(x)\times g(x)\rvert$ هي
ℓ	ℓ'	$\ell\ell'$
$\ell \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	لا توجد نتيجة يمكن النص عليها.

إذا كانت $\lim_{x\to\alpha} \lvert f(x)\rvert$ هي	و $\lim_{x\to\alpha} \lvert g(x)\rvert$ هي	فإن $\lim_{x\to\alpha} \left\lvert \frac{g(x)}{f(x)} \right\rvert$ هي
ℓ	ℓ' حيث $\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
$\ell \neq 0$	0	$+\infty$
0	0	لا توجد نتيجة يمكن النص عليها.
ℓ	$+\infty$	0
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	لا توجد نتيجة يمكن النص عليها.

• ملاحظة : الحالات التي لا تسمح فيها المبرهنات بالنص على نتيجة تسمى حالات عدم التعيين، عددها أربعة و هي من الأشكال التالية : $+\infty-\infty$ ؛ $0\times\infty$ ؛ $\frac{0}{0}$ ؛ $\frac{\infty}{\infty}$

معـــارف

• النهايات و الحصر

1 • f ، g و h هي دوال معرفة في جوار $+\infty$ حيث $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ؛ ℓ عدد حقيقي.

إذا كان $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = \ell$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

2 • f و g دالتان عدديتان معرفتان في جوار $+\infty$ حيث $f(x) \geq g(x)$.

إذا كان $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3 • f و g دالتان عدديتان معرفتان في جوار $+\infty$ حيث $f(x) \leq g(x)$.

إذا كان $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

• نهاية دالة كثير الحدود

f دالة كثيرة الحدود معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

حيث $a_n \neq 0$ و n عدد طبيعي غير منعدم.

لدينا $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (a_n x^n)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (a_n x^n)$

• نهاية دالة ناطقة

f دالة ناطقة حيث : $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + ... + b_1 x + b_0}$ ؛ $a_n \neq 0$ و $b_p \neq 0$.

$n \in \mathbb{N}^*$ و $p \in \mathbb{N}^*$.

لدينا $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\dfrac{a_n x^n}{b_p x^p}\right)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{a_n x^n}{b_p x^p}\right)$

• نهاية دالة مركبة

f ، g و h دوال عددية حيث $h = g \circ f$ ؛ a ، b و ℓ أعداد حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$.

إذا كان $\lim_{x \to a} f(x) = b$ و $\lim_{y \to b} g(y) = \ell$ فإن $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \ell$.

• السلوك التقاربي

f دالة عددية معرفة على مجال من الشكل $]a ; +\infty[$ أو $]-\infty ; a[$

حيث a عدد حقيقي معلوم و b عدد حقيقي. $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم.

• إذا كان $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ (أو $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$) فإن المستقيم ذا المعادلة $x = a$ هو مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$، يوازي محور التراتيب.

• إذا كان $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ (أو $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$) فإن المستقيم ذا المعادلة $y = b$ هو مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$، يوازي محور الفواصل.

• إذا كان $f(x) = mx + p + \varphi(x)$ حيث m ، p عددان حقيقيان و $m \neq 0$ و $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ (أو $\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$) فإن المستقيم ذا المعادلة $y = mx + p$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$.

• إذا كان $\lim_{|x| \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ و $\lim_{|x| \to +\infty} [f(x) - mx] = p$ حيث m ، p عددان حقيقيان و $m \neq 0$

فإن المستقيم ذا المعادلة $y = mx + p$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$.

. إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ و $\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x) - mx] = +\infty$ حيث $m \neq 0$ فإن $(\mathscr{C})$ يقبل فرع قطع مكافئ منحاه هو منحى المستقيم ذو المعادلة $y = mx$.

. إذا كان $m = 0$ فأن $(\mathscr{C})$ يقبل فرع قطع مكافئ منحاه هو منحى محور الفواصل.

. إذا كان $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (أو $-\infty$) فإن $(\mathscr{C})$ يقبل فرع قطع مكافئ منحاه هو منحى محور التراتيب.

II - الاستمرارية

f دالة معرفة على مجموعة D، a عدد حقيقي غير منعدم من D. I مجال محتوى في D.

- f مستمرة عند a يعني $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- f مستمرة على I يعني f مستمرة عند كل عدد حقيقي a من I.

• العمليات الجبرية

f و g دالتان معرفتان على مجال I، a عدد حقيقي ينتمي إلى I.

. إذا كانت f و g مستمرتين عند a فإن الدالتين $f+g$ و $f\times g$ مستمرتان عند a.

. إذا كانت g مستمرة عند a و $g(a) \neq 0$ فإن الدالة $\frac{1}{g}$ مستمرة عند a.

. إذا كانت f و g مستمرتين عند a و $g(a) \neq 0$ فإن الدالة $\frac{f}{g}$ مستمرة عند a.

. إذا كانت f مستمرة عند a و g مستمرة عند $f(a)$ فإن الدالة gof مستمرة عند a.

. الدوال كثيرة الحدود، sin، cos ، $x \longmapsto |x|$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

. الدوال الناطقة مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها .

. الدالة $x \longmapsto \sqrt{x}$ مستمرة على المجال $[0 ; +\infty[$.

• مبرهنة القيم المتوسطة

f دالة معرفة على المجال $[a ; b]$.

. إذا كانت f مستمرة على المجال $[a ; b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي m محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد على الأقل عدد حقيقي c في المجال $[a ; b]$ حيث $f(c) = m$.

• التفسير الهندسي

. المستقيم ذو المعادلة $y = m$ يقطع المنحنى الممثل للدالة f في نقطة على الأقل، فاصلتها c تنتمي إلى المجال $[a ; b]$.

ملاحظة : . إذا كانت f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a ; b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي m محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد عدد حقيقي c وحيد ينتمي إلى المجال $[a ; b]$ حيث $f(c) = m$.

. إذا كانت f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a ; b]$ حيث $f(a).f(b) < 0$
فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا في المجال $]a ; b[$.

طرائــق

1 حساب نهاية مجموع أو جداء أو حاصل قسمة دالتين

تمرين

احسب النهايات التالية : $\lim_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2}\right)$ ؛ $\lim_{x \to 0}\left(\sqrt{x} + \frac{\sin x}{x}\right)$ ؛ $\lim_{x \to 1} \frac{3x}{(x-1)(x+2)}$

$\lim_{x \to -\infty}(x^3 + x)$ ؛ $\lim_{x \to +\infty}(x^3 + x)$.

حل

• حساب النهاية $\lim_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2}\right)$.

الدالة $x \longmapsto 1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2}$ معرفة على المجموعة $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

لدينا $\lim_{x \to +\infty} 1 = 1$ ؛ $\lim_{x \to +\infty}\left(-\frac{2}{x}\right) = 0$ ؛ $\lim_{x \to +\infty} \frac{9}{x^2} = 0$ إذن $\lim_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2}\right) = 1$.

• حساب النهاية $\lim_{x \to 0}\left(\sqrt{x} + \frac{\sin x}{x}\right)$.

الدالة $x \longmapsto \sqrt{x} + \frac{\sin x}{x}$ معرفة على المجال $]0 ; +\infty[$.

لدينا $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$ و $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (لأن $\sin x \approx x$ بجوار العدد 0)

إذن $\lim_{x \to 0}\left(\sqrt{x} + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$

• حساب النهاية $\lim_{x \to 1} \frac{3x}{(x-1)(x+2)}$.

الدالة $x \longmapsto \frac{3x}{(x-1)(x+2)}$ معرفة على المجموعة $\mathbb{R} - \{-2 ; 1\}$.

لدينا $\lim_{x \to 1}(3x) = 3$ و $\lim_{x \to 1}(x-1)(x+2) = 0$.

من أجل كل عدد x قريب من 1 حيث $x < 1$ ؛ $(x-1)(x+2) < 0$.

و من أجل كل عدد x قريب من 1 حيث $x > 1$ ؛ $(x-1)(x+2) > 0$.

حسب المبرهنات المقدمة في الجداول السابقة ؛

ينتج أن $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{3x}{(x-1)(x+2)} = -\infty$ و $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{3x}{(x-1)(x+2)} = +\infty$

• حساب النهاية $\lim_{x \to -\infty}(x^3 + x)$.

الدالة $x \longmapsto x^3 + x$ معرفة على $\mathbb{R}$.

لدينا $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ إذن $\lim_{x \to -\infty}(x^3 + x) = -\infty$.

• حساب النهاية $\lim_{x \to +\infty}(x^3 + x)$.

لدينا $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ إذن $\lim_{x \to +\infty}(x^3 + x) = +\infty$.

2 رفع حالة عدم التعيين

تمرين

أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-x^2+x+1)$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x+\sqrt{x}}{x-1}$ ؛

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}(x^2+3\sqrt{x})$.

حل

• حساب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-x^2+x+1)$. الدالة $x\longmapsto x^3-x^2+x+1$ معرفة على $\mathbb{R}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2)=-\infty$

المبرهنة المتعلقة بنهاية مجموع دالتين لا تسمح بإعطاء نتيجة.

من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم، $x^3-x^2+x+1=x^3\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)=1$.

ينتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-x^2+x+1)=+\infty$.

• حساب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x+\sqrt{x}}{x-1}\right)$. الدالة $x\longmapsto\dfrac{4x+\sqrt{x}}{x-1}$ معرفة على $\mathbb{R}^+-\{1\}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x+\sqrt{x})=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$.

المبرهنة المتعلقة بنهاية حاصل قسمة دالتين لا تسمح بإعطاء نتيجة.

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x يختلف عن 1

$$\frac{4x+\sqrt{x}}{x-1}=\frac{x\left(4+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{4+\frac{\sqrt{x}}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{4+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{x}}$$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=4$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x+\sqrt{x}}{x-1}=4$.

• حساب النهاية $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. الدالة $x\longmapsto\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)=0$ و $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$.

المبرهنة المتعلقة بنهاية حاصل قسمة دالتين لا تسمح بإعطاء نتيجة.

نعلم أن $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ؛ $\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$

بوضع $y = \frac{x}{2}$ يكون $\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2} = 0$ و $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2$

نعلم أن $\lim_{y \to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\right) = 1$. إذن $\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right) = 1$.

ينتج أن $\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 1$. و بالتالي $\lim_{x \to 0}\left(\frac{1 - \cos x}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$.

• حساب النهاية $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}(x^2 + 3\sqrt{x})$. الدالة $x \longmapsto \frac{1}{x}(x^2 + 3\sqrt{x})$ معرفة على $]0 ; +\infty[$.

لدينا $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 3\sqrt{x}) = +\infty$.

المبرهنة المتعلقة بنهاية جداء دالتين لا تسمح بإعطاء نتيجة.

من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ؛ $\frac{1}{x}(x^2 + 3\sqrt{x}) = \frac{x^2}{x} + \frac{3\sqrt{x}}{x} = x + \frac{3}{\sqrt{x}}$

لدينا $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$. إذن $\lim_{x \to +\infty}\left(x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$. ينتج أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}(x^2 + 3\sqrt{x}) = +\infty$

3 إستعمال الحصر لحساب نهاية دالة

تمرين

احسب النهايات التالية :

$\lim_{x \to +\infty} (2x - \sin x)$ ؛ $\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ ؛ $\lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}}$.

حل

• حساب النهاية $\lim_{x \to +\infty}(2x - \sin x)$. الدالة $x \longmapsto (2x - \sin x)$ معرفة على $\mathbb{R}$.

نعلم أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $-1 \le \sin x \le 1$

إذا كان $x \ge 0$ فإن $-1 \le \sin x \le 1$ و $-1 \le -\sin x \le 1$

ينتج أن $2x - 1 \le 2x - \sin x \le 2x + 1$.

لدينا $\lim_{x \to +\infty}(2x - 1) = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty}(2x + 1) = +\infty$

و $2x - 1 \le 2x - \sin x \le 2x + 1$. إذن $\lim_{x \to +\infty} (2x - \sin x) = +\infty$.

• حساب النهاية $\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$. الدالة $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$.

من أجل أن كل عدد حقيقي x ؛ $-1 \le \sin x \le 1$.

إذا كان $x > 0$ فإن $-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$. لدينا $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ إذن $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

• حساب النهاية $\lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}}$. الدالة $x \longmapsto \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}}$ معرفة على المجال $]0 ; +\infty[$.

من أجل أن كل عدد موجب تماما x ؛ $-1 \le \cos x \le 1$. و بالتالي $1 \le 2 + \cos x \le 3$.

بما أن $\sqrt{x} > 0$ على المجال $]0 ; +\infty[$ فإن $\frac{1}{\sqrt{x}} \le \frac{2 + \cos x}{x} \le \frac{3}{\sqrt{x}}$

نعلم أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. إذن $\lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}} = 0$.

4 حساب نهاية دالة مركبة

تمرين

احسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+3}$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}$ ؛ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

حل

• حساب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+3}$. الدالة $x\longmapsto\sqrt{2x+3}$ معرفة على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$.

لتكن f الدالة $x\longmapsto 2x+3$ المعرفة على $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$

و g الدالة $y\longmapsto\sqrt{y}$ المعرفة على $[0;+\infty[$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$ ؛ $(g\circ f)(x)=\sqrt{2x+3}$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3)=+\infty$ و $\lim\limits_{y\to+\infty}\sqrt{y}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+3}=+\infty$.

• حساب النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}$.

الدالة $x\longmapsto\sqrt{x^2-x}$ معرفة على المجموعة $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{y}=+\infty$. إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}=+\infty$.

• حساب النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

الدالة $x\longmapsto\frac{\sin 3x}{x}$ معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$.

من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ؛ $\frac{\sin 3x}{x}=3\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)$.

بوضع $y=3x$ نلاحظ أن y يؤول إلى 0 عندما x يؤول إلى 0 .

و نعلم أن $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$. إذن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=1$

و بالتالي $\lim\limits_{x\to 0}3\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)=3$ أي $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=3$.

5 البحث عن المستقيمات المقاربة للمنحنى الممثل لدالة

تمرين 1

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{3x^2+1}{x+2}$.

و $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم.

1 . ادرس نهاية الدالة f عن اليمين و عن اليسار عند 2- . ماذا تستنتج؟

2 . عين ثلاثة أعداد حقيقية a، b و c حيث من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}-\{-2\}$ ؛

$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$.

3 . استنتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلة له.

حل

1 . الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$. لدينا $\lim_{x \to -2}(3x^2+1) = 13$ ، $13 > 0$ ، $\lim_{x \to -2}(x+2) = 0$.

إشارة $x+2$ ملخصة في الجدول المقابل .

x	$-\infty$ -2 $+\infty$
$x+2$	- 0 +

ينتج أن $\lim_{x \overset{>}{\to} -2} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \overset{<}{\to} -2} f(x) = -\infty$.

و بالتالي فالمستقيم ذو المعادلة $x = -2$ هو مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$، (يوازي محور التراتيب).

2 . باستعمال القسمة الإقليدية لكثير الحدود $3x^2 + 1$ على كثير الحدود $x + 2$ نجد حاصل القسمة هو $3x - 6$ و باقي القسمة هو 13 .

إذن من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{-2\}$ ؛ $\frac{3x^2+1}{x+2} = 3x - 6 + \frac{13}{x+2}$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{-2\}$ ؛ $f(x) = 3x - 6 + \frac{13}{x+2}$

ينتج أن الأعداد a، b و c المحققة للشرط هي $a = 3$ ؛ $b = -6$ و $c = 13$.

(يمكن الحصول على الأعداد a، b و c باستعمال شرط تساوي كثيري حدود).

3 . استنتاج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا.

لدينا $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} 3x = +\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 3x = -\infty$

نلاحظ أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{13}{x+2} = 0$ و $\lim_{x \to -\infty} \frac{13}{x+2} = 0$

ينتج أن المستقيم ذا المعادلة $y = 3x - 6$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$.

تمرين 2

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ و $(\mathscr{C}_g)$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم. أثبت أن المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار $+\infty$.

حل

مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل عدد حقيقي x، $x^2 + x + 1 > 0$.

لدينا $\lim_{x \to +\infty}(x^2 + x + 1) = +\infty$ إذن $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty$ و بالتالي $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

• حساب $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ؛ $\frac{g(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$

إذن $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1$.

• حساب $\lim_{x \to +\infty} [g(x) - x]$. لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x) - x = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$

$$= \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}$$

$$= \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)=2$ إذن $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-x\right]=\frac{1}{2}$

نستنتج أن المستقيم ذا المعادلة $y=x+\frac{1}{2}$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_g)$ بجوار $+\infty$.

تمرين 3

h هي الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=\frac{x^2-5}{3x^2+1}$ و $(\mathscr{C}_h)$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم. أثبت أن المنحنى $(\mathscr{C}_h)$ يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور الفواصل.

حل

- الدالة h معرفة على $\mathbb{R}$.
- حساب نهايتي h عند $-\infty$ و $+\infty$. لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5}{3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5}{3x^2+1}=\frac{1}{3}$

إذن $\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}h(x)=\frac{1}{3}$

و بالتالي المنحنى $(\mathscr{C}_h)$ يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور الفواصل معادلته $y=\frac{1}{3}$.

6 إثبات إستمرارية دالة عند عدد حقيقي

تمرين

ادرس استمرارية كل دالة من الدوال f ، g و h التالية عند العدد x_0.

1. $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ إذا كان $x\neq 1$ و $f(1)=2$. $x_0=1$
2. $g(x)=\frac{2x}{\sin x}$ إذا كان $x\neq 0$ و $g(0)=0$. $x_0=0$
3. $h(x)=\frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$ إذا كان $x\neq 3$ و $h(3)=4$. $x_0=3$

حل

1. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

- حساب $\lim_{x\to 1}f(x)$. لدينا $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$ و $\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}-1)=0$.

إذن لا توجد مبرهنة تسمح بإعطاء النتيجة (أي توجد حالة عدم التعيين).

لدينا من أجل كل عدد x يختلف عن 1 ؛

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\sqrt{x}+1$$

إذن $\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)=2$. نعلم أن $f(1)=2$ و بالتالي الدالة f مستمرة عند العدد 1.

2. الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$.

- حساب $\lim_{x\to 0}g(x)$. لدينا $\lim_{x\to 0}(2x)=0$ و $\lim_{x\to 0}\sin x=0$. لا توجد مبرهنة تسمح بإعطاء النتيجة.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم، $\frac{2x}{\sin x}=\frac{2}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$

نعلم أن $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ إذن $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin x} = 2$ أي $\lim_{x\to 0} g(x) = 2$.

لدينا $g(0) = 0$. إذن $\lim_{x\to 0} g(x) \neq g(0)$. و بالتالي الدالة g ليست مستمرة عند العدد 0.

3 ـ الدالة h معرفة على $\mathbb{R}$.

• حساب $\lim_{x\to 0} h(x)$. لدينا $\lim_{x\to 3} \sqrt{1+x} - 2 = 0$ و $\lim_{x\to 3} (x-3) = 0$.

لا توجد مبرهنة تسمح بإعطاء النتيجة.

من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 3 ؛

$$h(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 2}{x-3}$$

$$= \frac{(\sqrt{1+x} - 2)(\sqrt{1+x} + 2)}{(x-3)(\sqrt{1+x} + 2)} = \frac{(1+x) - 4}{(x-3)(\sqrt{1+x} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 2}$$

لدينا : $\lim_{x\to 3} (\sqrt{1+x} + 2) = 4$ إذن $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{1+x} - 2}{x-3} = 4$

و بالتالي $\lim_{x\to 3} h(x) = 4$. نعلم أن $h(3) = 4$.

بما أن $\lim_{x\to 3} h(x) = h(3)$ فإن الدالة h مستمرة عند العدد 3.

7 إستعمال مبرهنة القيم المتوسطة

تمرين

بين أن المعادلة $x^3 + x + 1 = 0$ تقبل حلا واحدا في المجال المفتوح $]-1 ; 0[$.

حل

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = x^3 + x + 1$.

f معرفة على $\mathbb{R}$ إذن f معرفة على المجال المغلق $[-1 ; 0]$.

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ (لأن f هي مجموع دوال مرجعية معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$) .

إذن f مستمرة على $\mathbb{R}$. و بالتالي f مستمرة على المجال $[-1 ; 0]$.

لدينا $f(-1) = -1$ و $f(0) = 1$ إذن $f(-1)$ و $f(0)$ مختلفان في الإشارة.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = 3x^2 + 1$.

نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) > 0$. و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ينتج أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-1 ; 0]$.

لدينا f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[-1 ; 0]$ و $f(-1)$ و $f(0)$ من إشارتين مختلفتين

إذن المعادلة $x^3 + x + 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال المفتوح $]-1 ; 0[$.

تمرين 1

f هي الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$.

ليكن D مجموعة تعريف f و $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1 . عين مجموعة التعريف D للدالة f و بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من D ،

$$f(x) = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}} .$$

2 . احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3 . بين أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار $+\infty$.

4 . أثبت أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار $-\infty$. عين معادلة لهذا المستقيم.

حل

1 . تعيين مجموعة التعريف D للدالة f . الدالة f : معرفة إذا وفقط إذا كان $x^2 - 3x + 1 \geq 0$.

دراسة إشارة ثلاثي الحدود $x^2 - 3x + 1$.

$\Delta = 5$ ، $\Delta > 0$ إذن ثلاثي الحدود $x^2 - 3x + 1$ يقبل جذرين مختلفين في $\mathbb{R}$ هما : $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ و $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

باستعمال المبرهنات حول إشارة ثلاثي حدود من الدرجة الثانية،

ينتج أن $x^2 - 3x + 1 \geq 0$ على $\left]-\infty ; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{5}}{2} ; +\infty\right[$ ، $D = \left]-\infty ; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{5}}{2} ; +\infty\right[$.

• كتابة $f(x)$ على الشكل $\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$. ثلاثي الحدود $x^2 - 3x + 1$ يكتب على الشكل النموذجي كما يلي : $x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي x من D ؛ $f(x) = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$.

2 . حساب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 3x + 1) = +\infty$

إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1} = +\infty$. و بالتالي $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

لدينا أيضا $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 3x + 1) = +\infty$

ينتج أن $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1} = +\infty$. و بالتالي $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

3 . إثبات أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار $+\infty$.

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

لدينا من أجل كل x من D ؛ $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 1}}{x} = \frac{x\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1$ إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

• حساب $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - x\right]$.

من أجل كل عدد حقيقي x موجب من D ، $f(x) - x = \sqrt{x^2 - 3x + 1} - x = \dfrac{-3x + 1}{\sqrt{x^2 - 3x + 1} + x}$

$$= \frac{x\left(-3 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} = \frac{-3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

لدينا $\lim_{x \to +\infty}\left(-3 + \frac{1}{x}\right) = -3$ و $\lim_{x \to +\infty}\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 = 2$ إذن $\lim_{x \to +\infty}\left[f(x) - x\right] = -\frac{3}{2}$

ينتج أن المستقيم ذا المعادلة $y = x - \frac{3}{2}$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

4 . البحث عن مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $-\infty$. لدينا $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

• حساب $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x سالب من D ؛ $\frac{f(x)}{x} = \left(-\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)$

بما أن $\lim_{x \to -\infty}\left(-\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}\right) = -1$ فإن $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$.

• حساب $\lim_{x \to -\infty}\left[f(x) + x\right]$. من أجل كل عدد x سالب من D ؛ $f(x) + x = \sqrt{x^2 - 3x + 1} + x$

$$= \frac{-3x + 1}{\sqrt{x^2 - 3x + 1} - x} = \frac{x\left(-3 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1\right)} = \frac{-3 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1}$$

لدينا $\lim_{x \to -\infty}\left(-3 + \frac{1}{x}\right) = -3$ و $\lim_{x \to -\infty}\left(-\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1\right) = -2$ إذن $\lim_{x \to -\infty}\left[f(x) + x\right] = \frac{3}{2}$.

و بالتالي المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = -x + \frac{3}{2}$.

تمرين 2

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = \sqrt{x - 2}$ إذا كان $x \geq 2$

و $f(x) = x^2 + kx + 1$ إذا كان $x < 2$.

• عين العدد الحقيقي k حتى تكون الدالة f مستمرة عند العدد 2 .

حل

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$. إذن الدالة f معرفة عند العدد 2 و $f(2) = 0$.

• حساب $\lim_{x \to 2} f(x)$.

$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 2} \sqrt{x - 2} = 0$. $\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 2}(x^2 + kx + 1) = 5 + 2k$

لدينا $f(2) = 5 + 2k$ يعني $5 + 2k = 0$ أي $k = -\frac{5}{2}$.

و بالتالي إذا كان $k = -\frac{5}{2}$ فإن $\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = 0$ (أي $\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = f(2)$)

ينتج أن إذا كان $k = -\frac{5}{2}$ فإن $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

و بالتالي الدالة f مستمرة عند العدد 2 إذا وفقط إذا كان $k = -\frac{5}{2}$.

العمليات على النهايات

في التمارين من ① إلى ⑦، يطلب حساب نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى العدد a.

1 $f(x) = x^2 + x + 1$ ؛ $a = 1$

2 $f(x) = x^3 + 3x$ ؛ $a = 0$

3 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$ ؛ $a = +\infty$

4 $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}$ ؛ $a = +\infty$

5 $f(x) = x^3 \left(\cos \frac{1}{x} - 2\right)$ ؛ $a = +\infty$

6 $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ ؛ $a = +\infty$ أو $a = 1$ أو $a = -\infty$.

7 $f(x) = \frac{E(x)}{x}$ حيث $E(x)$ هو الجزء الصحيح للعدد x. $a = +\infty$.

في التمارين التالية من ⑧ إلى ⑯ ، يطلب تعيين نهايات الدالة f عندما يؤول x إلى a.

8 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10}$ ؛ $a = 2$ أو $a = -5$ أو $a = +\infty$ أو $a = -\infty$.

9 $f(x) = \frac{8x^3 - 27}{4x^2 - 9}$ ؛ $a = \frac{3}{2}$ أو $a = -\frac{3}{2}$ أو $a = +\infty$ أو $a = -\infty$.

10 $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$ ؛ $a = +\infty$.

11 $f(x) = \frac{3x-5}{x+1} - \frac{\sin x}{x}$ ؛ $a = +\infty$.

12 $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ ؛ $a = 1$.

13 $f(x) = \frac{1}{x^4}$ ؛ $a = 0$.

14 $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ؛ $a = 0$.

15 $f(x) = \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{3}}$ ؛ $a = \frac{\pi}{3}$.

16 $f(x) = \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$ ؛ $a = 0$.

المستقيمات المقاربة

في التمارين من ⑰ إلى ㉕.

$(\mathscr{C})$ هو المنحنى الممثل للدالة f في معلم معطى.

ادرس وجود المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathscr{C})$.

17 $f(x) = \frac{x}{x-1}$

18 $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$

19 $f(x) = x + 1 - \frac{3}{x^2 + 1}$

20 $f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x - 5}$

21 $f(x) = \frac{x^2 + \sin x}{x + 1}$

22 $f(x) = x - \sqrt{x}$

23 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

24 $f(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$

25 نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \cos x - x$$

1 • ادرس نهاية كل من $f(x) - x$ و $\frac{f(x)}{x}$ عندما يؤول x إلى $+\infty$.

2 • بين أن المنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f لا يقبل مستقيما مقاربا في جوار $+\infty$.

(لحساب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ يمكن إثبات أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $-1 - x \le f(x) \le 1 - x$)

الاستمرارية

في التمارين من ㉖ إلى ㉘.

f دالة عددية و x_0 عدد حقيقي، يطلب دراسة استمرارية الدالة f عند x_0 .

26 $f(x) = x^2 - 2x$ ؛ $x_0 = 1$

27 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ؛ $x_0 = 0$

28 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ؛ إذا كان $x_0 \neq 0$ و $f(0) = 1$.

29 $f(x) = \frac{2x^2 + |x|}{x}$ ؛ $x_0 = 0$.

خواص الدوال المستمرة على مجال

30 1) ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 2x^3 + 5x - 4$.

2) استنتج أن المعادلة $2x^3 + 5x - 4 = 0$ تقبل حلا واحدا في المجال المفتوح $]0 ; 1[$.

31 نفس السؤال بالنسبة للمعادلة $x^6 + x^2 - 1 = 0$.

32 1) ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا في المجال $]-1 ; 1[$.

33 f هي الدالة المعرفة كمايلي $f(x) = \frac{x^2}{1 + x}$
بين أن المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلا واحدا α في المجال $]2 ; 3[$.

34 بيّن أن المعادلة $\cos x = x$ تقبل حلا واحدا في $\mathbb{R}$.

35 بين أن المعادلة $-x^3 + 2x^2 - x + 2 = 0$ تقبل حلا واحدا في المجال المفتوح $]1 ; 3[$.

مسائل

36 f هي دالة عددية معرفة كما يلي

$$f(x) = \frac{5x^2 + x + 1}{x + 2} .$$

1) عين مجموعة تعريف D للدالة f و بين أنه توجد ثلاثة أعداد حقيقية a، b و c حيث من أجل كل عدد حقيقي x من D،

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2} .$$

2) ليكن $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

- عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.
- حدد الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم المقارب المائل له.

37 f دالة عددية معرفة كما يلي :

$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} + mx$ ؛ $m \in \mathbb{R}$.

عين نهايات الدالة f عندما يؤول x إلى $-\infty$ أو $+\infty$ (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m).

38 h هي الدالة العددية المعرفة كما يلي :

$$h(x) = \sin(x^2 + x + 1)$$

أثبت أن الدالة h مستمرة عند كل عدد حقيقي x_0

39 ادرس $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

40 f هي دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 5}{(x + 1)^2}$

1) بين أنه يوجد عددان حقيقيان a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 ؛

$$f(x) = ax + b + \varphi(x)$$

حيث $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$.

2) عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

3) عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ الممثل للدالة f في معلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

41 طول حرف مكعب هو x cm و أبعاد متوازي المستطيلات هي 1 cm، 3 cm و $(3x + 4)$ cm

أوجد حصرا لقيمة x التي من أجلها يكون حجم المكعب يساوي حجم متوازي المستطيلات.

بين أن $3,5 < x < 3,6$.

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي

و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة. 

Hard_equation



• قابلية الاشتقاق عند عدد حقيقي

f دالة معرفة على مجال مفتوح يشمل العدد الحقيقي x_0.
الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا و فقط إذا كانت نهاية الدالة $h \longmapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
عددا حقيقيا عندما h يؤول إلى 0.
هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f عند x_0 و يرمز له $f'(x_0)$.
نكتب $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ أو $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

• قابلية الاشتقاق على مجال - الدالة المشتقة لدالة

f دالة معرفة على مجال I.
- الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا و فقط إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من المجال I.
- الدالة $f' : x \longmapsto f'(x)$ حيث $f'(x)$ هو العدد المشتق للدالة f' عند العدد x تسمى الدالة المشتقة للدالة f.

• معادلة المماس

f دالة معرفة على مجال I يشمل العدد الحقيقي x_0.
$(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
- إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x_0 فإن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مماسا (T) عند النقطة A فاصلتها x_0.
معامل توجيه المماس (T) هو $f'(x_0)$.
معادلة المماس (T) هي : $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

• التقريب التآلفي لدالة عند عدد حقيقي x_0

f دالة معرفة على مجال I يشمل العدد x_0.
الدالة التآلفية g المعرفة كما يلي : $g : x \longmapsto f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
تسمى التقريب التآلفي المماسي للدالة f عند العدد x_0.

• قابلية الاشتقاق و الإستمرارية

f دالة معرفة على مجال I يشمل العدد x_0.
إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x_0 فإن f مستمرة عند x_0. (العكس غير صحيح).

• الدوال المشتقة لدوال مألوفة

الدالة...	معرفة على...	قابلة للاشتقاق على...	دالتها المشتقة هي...
$k \in \mathbb{R}$ ؛ $x \longmapsto k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 0$
$n \in \mathbb{Z}$ ؛ $x \longmapsto x^n$	$\mathbb{R}$، إذا كان $n \geq 0$ $\mathbb{R}^*$، إذا كان $n < 0$	$\mathbb{R}$، إذا كان $n \geq 0$ $\mathbb{R}^*$، إذا كان $n < 0$	$x \longmapsto nx^{n-1}$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	$]0 ; +\infty[$	$x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \longmapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto \cos x$
$x \longmapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto -\sin x$
$x \longmapsto \tan x$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$x \longmapsto \frac{1}{\cos^2 x}$

• العمليات الجبرية

f، g دالتان معرفتان على نفس المجال I ؛ k عدد حقيقي.

إذا كانت f و g قابلتين للاشتقاق على المجال I فإن :

- الدالة $f+g$ قابلة للاشتقاق على I و $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- الدالة $k.f$ قابلة للاشتقاق على I و $(k.f)'(x) = k.f'(x)$
- الدالة $f.g$ قابلة للاشتقاق على I و $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
- الدالة $\frac{1}{g}$ قابلة للاشتقاق على I حيث $g(x) \neq 0$ و $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$
- الدالة $\frac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق على I حيث $g(x) \neq 0$ و $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$

• الدالة المشتقة لدالة مركبة

f دالة معرفة على مجال I يشمل العدد x_0، g دالة معرفة على مجال J يشمل $f(x_0)$.

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x_0 و g قابلة للاشتقاق عند $f(x_0)$ فإن الدالة $g \circ f$ قابلة للاشتقاق عند x_0

و $\left(g \circ f\right)'(x_0) = f'(x_0).g'\left[f(x_0)\right]$

• حالات خاصة

f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I ؛ n عدد صحيح.

- الدالة $g : x \longmapsto \left[f(x)\right]^n$ قابلة للاشتقاق على I (حيث $f(x) \neq 0$ من أجل $n < 0$)

و $g'(x) = n.f'(x).\left[f(x)\right]^{n-1}$

- الدالة $h : x \longmapsto \sqrt{f(x)}$ قابلة للاشتقاق على I (حيث $f(x) > 0$) و $h'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

- **إتجاه تغيرات دالة**

f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I.

- إذا كان من أجل كل عدد x من I، $f'(x) = 0$ فإن الدالة f ثابتة على I.
- إذا كان من أجل كل عدد x من I، $f'(x) \geq 0$ $\left(f'(x) = 0\right.$ من أجل قيم معزولة من I$\left.\right)$ فإن الدالة f متزايدة تماما على I.
- إذا كان من أجل كل عدد x من I، $f'(x) \leq 0$ $\left(f'(x) = 0\right.$ من أجل قيم معزولة من I$\left.\right)$ فإن الدالة f متناقصة تماما على I.

- **النقط الحدية لمنحن**

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I يشمل العدد x_0.

$(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم.

- إذا كانت f تقبل قيمة حدية محلية عند x_0 فإن $f'(x_0) = 0$.
- إذا كانت f' تنعدم عند x_0 و تغير إشارتها فإن f تقبل قيمة حدية محلية عند x_0 (العدد $f(x_0)$ هو قيمة عظمى أو قيمة صغرى للدالة f عند x_0 من I).

في هذه الحالة النقطة ذات الإحداثيين $\left(x_0\ ;f(x_0)\right)$ تسمى نقطة حدية للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

- المماس للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند نقطة حدية فاصلتها x_0، يوازي محور الفواصل و معادلته هي $y = f(x_0)$.

- **الدوال المشتقة المتتابعة**

f دالة قابلة للاشتقاق n مرة على مجال I حيث $n \geq 1$.

f' دالتها المشتقة من المرتبة 1 ؛ $f^{(2)} = f'' = (f')'$ دالتها المشتقة من المرتبة 2 ؛ ...

$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$ دالتها المشتقة من المرتبة n.

نضع : $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$ أو $y' = \dfrac{dy}{dx}$ ؛ $f''(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{df}{dx}\right) = \dfrac{d^2f}{dx^2}$ ؛ $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^nf}{dx^n}$

- **نقطة إنعطاف منحنى**

f دالة معرفة على مجال I و قابلة للاشتقاق مرتان على I. x_0 ينتمي إلى I. $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم.

- إذا كانت الدالة f'' تنعدم و تغير الإشارة عند x_0 فإن النقطة A ذات الفاصلة x_0 تسمى نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ الممثل للدالة f.
- المماس عند النقطة A يقطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ فيها.

• المعادلات التفاضلية

f دالة مألوفة، مستمرة على مجال I.

• لحل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = f(x)$ أو $y'' = f(x)$

• نبحث عن الدوال g القابلة للاشتقاق مرّة أو مرتين على I حيث $g'(x) = f(x)$ أو $g''(x) = f(x)$.

• حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال $x \longmapsto g(x)$.

• لحل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = f(x)$ أو $y'' = f(x)$ نستعين بجدول الدوال المشتقة لدوال مألوفة.

• مخطط لدراسة دالة

يمكن تنظيم دراسة دالة f حسب المخطط التالي :

• نعين مجموعة التعريف (تبسيط عبارة $f(x)$ عند الضرورة).

• نعين مجموعة دراسة الدالة : خواص هندسية للمنحنى (دالة فردية، دالة زوجية، دالة دورية).

• نحسب النهايات عند حدود مجموعة الدراسة.

• ندرس الاستمرارية، الاشتقاق، التغيرات :

نحسب الدالة المشتقة، ندرس إشارتها ثم نستنتج اتجاه تغير الدالة.

• ندرس الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة.

• نرسم التمثيل البياني بعد تعليم بعض النقط الخاصة (مركز تناظر، نقطة إنعطاف، ...) و بعض المستقيمات الخاصة (محور تناظر، مستقيمات مقاربة، مماسات، ...).

• نستفيد من الخواص البارزة لانجاز الرسم (عناصر التناظر، ...).

طرائــق

1 دراسة قابلية اشتقاق دالة عند عدد حقيقي و تعيين العدد المشتق

تمرين

• أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد الحقيقي x_0 ثم عين العدد المشتق $f'(x_0)$ عند وجوده في كل حالة من الحالات التالية :

1. $f(x) = x^2 - 2x - \sin x$ ؛ $x_0 = 0$
2. $f(x) = (2x - 3)^2$ ؛ $x_0 = -1$
3. $f(x) = x^2 + |x|$ ؛ $x_0 = 0$
4. $f(x) = \sqrt{x}$ ؛ $x_0 = 0$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ ؛ $x_0 = 1$

حل

1 • دراسة قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = x^2 - 2x - \sin x$ عند العدد 0.

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ (لأن f مجموع دوال معرفة على $\mathbb{R}$) و $f(0) = 0$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ، $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x^2 - 2x - \sin x}{x} = x - 2 - \dfrac{\sin x}{x}$

و $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0}\left(x - 2 - \dfrac{\sin x}{x}\right) = 0 - 2 - 1 = -3$. إذن $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -3$

بما أن نهاية النسبة $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ عندما x يؤول إلى 0 هي عدد حقيقي، فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند الغدد 0 و العدد المشتق للدالة f عند 0 هو $f'(0)$ حيث $f'(0) = -3$.

2 • دراسة قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = (2x - 3)^2$ عند 1-.

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ لأنها مربع دالة معرفة على $\mathbb{R}$ و $f(-1) = 25$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1-.

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \frac{(2x - 3)^2 - 25}{x + 1} = \frac{(2x - 8) \times 2(x + 1)}{x + 1} = 4x - 16$$

لدينا $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1} (4x - 16) = -20$. إذن $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = -20$

بما أن نهاية النسبة $\dfrac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$ عند ما يؤول x إلى 1- هي عدد حقيقي، فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1- و $f'(-1) = -20$.

3 • دراسة قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = x^2 + |x|$ عند العدد 0.

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ (مجموع دالتين معرفتين على $\mathbb{R}$) و $f(0) = 0$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ، $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x^2 + |x|}{x} = x + \dfrac{|x|}{x}$

نعلم أن $|x| = x$ إذا كان $x \geq 0$ و $|x| = -x$ إذا كان $x \leq 0$.

إذن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left(x + \frac{x}{x}\right) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} (x+1) = 1$

و $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \left(x - \frac{x}{x}\right) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} (x-1) = -1$

بما أن $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

فإن النسبة $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ لا تقبل نهاية عند العدد 0.

و بالتالي الدالة f حيث $f(x) = x^2 + |x|$ غير قابلة الاشتقاق عند العدد 0 مع الملاحظة أن f قابلة للاشتقاق عند 0 عن اليمين و $f'(0) = 1$ و قابلة للاشتقاق عند 0 عن اليسار و $f'(0) = -1$

4 • دراسة قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \sqrt{x}$ عند 0.

الدالة f معرفة عند 0 و $f(0) = 0$.

من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ، $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

لدينا $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \sqrt{x} = 0$. إذن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

و بالتالي $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$. هذه النهاية ليست عددا حقيقيا.

ينتج أن الدالة f حيث $f(x) = \sqrt{x}$ غير قابلة للاشتقاق عند 0.

4 • دراسة قابلية اشتقاق الدالة f حيث $f(x) = \frac{1}{x-1}$، عند 1.

الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$.

بما أن الدالة f غير معرفة عند العدد 1 فإنها غير قابلة للاشتقاق عند العدد 1.

2 تعيين معادلة مماس للمنحنى الممثل لدالة عند نقطة منه فاصلتها x_0

تمرين

• في كل حالة من الحالات التالية، حدد إن كان المنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f يقبل مماسا أو نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0. عين معادلة لهذا المماس عند وجوده.

1 • $f(x) = 3x^2 - x - 2$ ؛ $x_0 = 1$

2 • $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$ ؛ $x_0 = 2$

3 • $f(x) = |x^3 - 1|$ ؛ $x_0 = 1$

4 • $f(x) = \cos x$ ؛ $x_0 = \frac{\pi}{4}$

حل

1 • دراسة قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = 3x^2 - x - 2$ عند العدد 1.

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و $f(1) = 0$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1} = \frac{(3x + 2)(x - 1)}{x - 1} = 3x + 2$$

لدينا أيضا $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (3x + 2) = 5$

بما أن $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ هي عدد حقيقي فإن f قابلة للاشتقاق عند 1 و $f'(1) = 5$.

ينتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 1، معادلته $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

لدينا $f(1) = 0$ و $f'(1) = 5$. إذن معادلة المماس هي $y = 5x - 5$.

2 • دراسة قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$ عند العدد 2.

الدالة f معرفة عند كل عدد حقيقي x حيث $x^2 - x - 2 \geq 0$.

2 و 1- هما جذرا ثلاثي الحدود $x^2 - x - 2$.

إذن مجموعة تعريف الدالة f هي $]-\infty ; -1] \cup [2 ; +\infty[$ و $f(2) = 0$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]2 ; +\infty[$ ؛

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x - 2} = \frac{\sqrt{(x + 1)(x - 2)}}{x - 2} = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 2}}$$

لدينا $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \sqrt{\frac{x + 1}{x - 2}} = +\infty$

بما أن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ ليست عددا حقيقيا فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند العدد 2.

ينتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل نصف مماس يوازي محور التراتيب معادلته $x = 2$ مع $x \geq 2$.

3 • دراسة قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = |x^3 - 1|$ عند العدد 1.

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و $f(1) = 0$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{|x^3 - 1| - 0}{x - 1} = \frac{|x^3 - 1|}{x - 1}$$

نلاحظ أن إذا كان $x > 1$ فإن $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1$

و إذا كان $x < 1$ فإن $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{-(x^3-1)}{x-1} = \frac{-(x-2)(x^2+x+1)}{x-1} = -(x^2+x+1)$

ينتج أن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} (x^2+x+1) = 3$

و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} [-(x^2+x+1)] = -3$

نلاحظ أن $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ هما عددان حقيقيان مختلفان إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 1 عن اليمين و عن اليسار و ليست قابلة للاشتقاق عند العدد 1 -.

و بالتالي المنحى $(\mathscr{C})$ يقبل نصف مماس (Δ_1) عن اليمين و نصف مماس (Δ_2) عن اليسار عند النقط من $(\mathscr{C})$ ذات الفاصلة 1.

• إيجاد معادلة نصف المماس (Δ_1).

لدينا $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ حيث $f'(1) = 3$. أي $y = 3(x-1) + 0$.

إذن $(\Delta_1) : y = 3x - 3$ حيث $x \geq 1$.

• إيجاد معادلة نصف المماس (Δ_2).

لدينا $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ حيث $f'(1) = -3$.

أي $y = -3(x-1) + 0$.

إذن $(\Delta_2) : y = -3x + 3$ حيث $x \leq 1$.

3 • دراسة قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \cos x$ عند العدد $\frac{\pi}{4}$.

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $\frac{\pi}{4}$ ؛

$$\frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{\cos x - \cos\frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{-2\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{-\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)}{\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)} \cdot \sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)$$

لدينا $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)}{\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)} = -1$

إذن $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ينتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد $\frac{\pi}{4}$ و $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و بالتالي المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مماسا (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\pi}{4}$ معادلته $y = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

أي $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$. ينتج أن $(\Delta) : y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$

3 تعيين الدالة المشتقة لدالة

تمرين

• عين مجموعة تعريف كل دالة f من الدوال التالية ثم مجموعة قابلية الاشتقاق و الدالة المشتقة لها.

1 • $f(x) = x^2 + x + \frac{3}{x}$

2 • $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{x - 1}$

3 • $f(x) = x + 3\sqrt{x^2 - 1}$

4 • $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$

5 • $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$

6 • $f(x) = \sqrt{2(1 - \cos x)}$

7 • $f(x) = (5x^2 - x)^3$

8 • $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

حل

1 • تعيين الدالة المشتقة للدالة f حيث : $f(x) = x^2 + x + \frac{3}{x}$.

الدالة f معرفة على $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty ; 0[$ و $]0 ; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ، $f'(x) = 2x + 1 - \frac{3}{x^2}$.

2 • تعيين الدالة المشتقة للدالة f حيث : $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{x - 1}$.

الدالة f معرفةَ على $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty ; 1[$ و $]1 ; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1، $f'(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(x - 1)^2}$

3 • تعيين الدالة المشتقة للدالة f حيث : $f(x) = x + 3\sqrt{x^2 - 1}$.

الدالة f معرفة على $]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$

و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty ; -1[$ و $]1 ; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x من المجموعة $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ $f'(x) = 1 + \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

4 • تعيين الدالة المشتقة للدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\sqrt{x^2+2x-1}$.

الدالة f معرفة على $]-\infty\,;-1-\sqrt{2}\,]\cup[-1+\sqrt{2}\,;+\infty[$

و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-1+\sqrt{2}\,;+\infty[$ و $]-\infty\,;-1-\sqrt{2}\,[$

و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty\,;-1-\sqrt{2}\,[\cup]-1+\sqrt{2}\,;+\infty[$ ؛ $f'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}$.

5 • تعيين الدالة المشتقة للدالة f حيث : $f(x)=\cos 2x-2\cos x$.

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

و من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x)=-2\sin 2x+2\sin x$

6 • تعيين الدالة المشتقة للدالة f حيث : $f(x)=\sqrt{2(1-\cos x)}$.

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $1-\cos x\geq 0$.

الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي x يختلف عن $2k\pi$

و من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $2k\pi$ ؛ $f'(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{2(1-\cos x)}}$

7 • تعيين الدالة المشتقة للدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=(5x^2-x)^3$.

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

بوضع g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=5x^2-x$

لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)=10x-1$

نلاحظ أن $f(x)=[g(x)]^3$. إذن $f'(x)=3\times g'(x).\,g(x)^2$

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=3(10x-1)(5x^2-x)^2$.

8 • تعيين الدالة المشتقة للدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2x+\dfrac{\pi}{3}$

و h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=\sin x$ ينتج أن $f=h\circ g$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)=2$.

و الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x)=\cos x$

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=g'(x)\times h'(g(x))=2\times\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

إذن الدالة المشتقة للدالة f هي الدالة f' المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f'(x)=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

4 دراسة إتجاه تغير دالة

تمرين

• ادرس إتجاه تغيرات كل دالة f من الدوال التالية المعرفة كما يلي :

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$
2. $f(x) = x + \sin x$
3. $f(x) = 5x + 1 + \frac{1}{x}$
4. $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

حل

1 • دراسة تغيرات الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$.

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ (لأن من أجل كل عدد حقيقي x ، $x^2 + 2 > 0$).

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x موجب، $f'(x) \geq 0$. إذن الدالة f متزايدة على $[0 ; +\infty[$.

و من أجل كل عدد حقيقي x سالب، $f'(x) \leq 0$. إذن الدالة f متناقصة على $]-\infty ; 0]$.

2 • دراسة تغيرات الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = x + \sin x$.

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = 1 + \cos x$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $1 + \cos x \geq 0$.

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) \geq 0$. ينتج أن الدالة متزايدة على $\mathbb{R}$.

3 • دراسة تغيرات الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = 5x + 1 + \frac{1}{x}$.

الدالة f معرفة على المجموعة $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty ; 0[$ و $]0 ; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ، $f'(x) = 5 - \frac{1}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ ملخصة في الجدول المقابل.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{5}}{5}$		0		$\frac{\sqrt{5}}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	

الدالة f متزايدة على كل من المجالين

$\left]-\infty ; -\frac{\sqrt{5}}{5}\right]$ و $\left[\frac{\sqrt{5}}{5} ; +\infty\right[$

و متناقصة على كل من المجالين $\left[-\frac{\sqrt{5}}{5} ; 0\right[$ و $\left]0 ; \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$.

4 • دراسة تغيرات الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = x - 2\sqrt{x}$.

الدالة f معرفة على المجال $[0 ; +\infty[$ و قابلة للاشتقاق على المجال $]0 ; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ، $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

إشارة $f'(x)$ ملخصة في الجدول المقابل :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

الدالة f متناقصة على المجال $]0 ; 1]$

و متزايدة على المجال $[1 ; +\infty[$.

5 إيجاد القيم الحدية لدالة

تمرين

• عين القيم الحدية لكل دالة من الدوال f المعرفة كما يلي :

• 1 $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$

• 2 $f(x) = 4x^3 - 3x - 1$

• 3 $f(x) = x - 2\sqrt{x - 2}$

حل

1 • تعيين القيم الحدية للدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$.

• الدالة f معرفة على المجال $]-\infty ; +\infty[$.

• الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty ; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = -4x^3 + 4x$

$f'(x)$ يكتب على الشكل $f'(x) = 4x(1 - x)(1 + x)$

إشارة $f'(x)$ ملخصة في الجدول المقابل :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$(1 - x)(1 + x)$		-	0	+		+	0	-	
$4x$		-		-	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	-		+	0	-	

• استنتاج القيم الحدية للدالة f على $\mathbb{R}$.

الدالة f' تنعدم و تغير الإشارة عند كل من الأعداد 1- ، 0 ، 1

إذن الدالة f تقبل قيمة كبرى عند 1- على المجال $]-\infty ; 0]$ و هي $f(-1)$ حيث $f(-1) = 2$.

و الدالة f تقبل قيمة صغرى عند 0 على المجال $[-1 ; 1]$ و هي $f(0)$ حيث $f(0) = 1$

و الدالة f تقبل قيمة كبرى عند 1 على المجال $[0 ; +\infty[$ و هي $f(1)$ حيث $f(1) = 2$.

2 • تعيين القيم الحدية للدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = 4x^3 - 3x - 1$.

• الدالة f معرفة على المجال $]-\infty ; +\infty[$ و قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty ; +\infty[$.

من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = 12x^2 - 3$

$f'(x)$ يكتب أيضا على الشكل : $f'(x) = 3(2x + 1)(2x - 1)$.

إشارة $f'(x)$ ملخصة في الجدول المقابل :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

• استنتاج القيم الحدية للدالة f على $\mathbb{R}$.

الدالة f' تنعدم و تغير الإشارة عند $-\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$

إذن الدالة f تقبل قيمة كبرى على المجال $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right]$ و هي $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ حيث $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

و تقبل قيمة صغرى على المجال $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ و هي $f\left(\frac{1}{2}\right)$ حيث $f\left(\frac{1}{2}\right) = -2$.

3 • تعيين القيم الحدية للدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = x - 2\sqrt{x-2}$.

• الدالة f معرفة على المجال $[2 ; +\infty[$.

• الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]2 ; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]2 ; +\infty[$ ؛ $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

$f'(x)$ يكتب أيضا على الشكل : $f'(x) = \frac{\sqrt{x-2} - 1}{\sqrt{x-2}}$

إشارة $f'(x)$ على المجال $]2 ; +\infty[$ هي إشارة $\sqrt{x-2} - 1$ على المجال $]2 ; +\infty[$.

إشارة $f'(x)$ على المجال $]2 ; +\infty[$ ملخصة في الجدول المقابل :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

الدالة f' تنعدم و تغير الإشارة عند 3

إذن الدالة f تقبل قيمة صغرى عند العدد 3 و هي $f(3)$ حيث $f(3) = 1$.

6 البحث عن الدوال المشتقة المتتابعة لدالة

تمرين 1

• عين الدالة المشتقة الثانية للدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

• أثبت أن المنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f يقبل نقطة انعطاف، يطلب تعيين إحداثييها.

حل

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (لأن f دالة كثير الحدود)

و من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = 3x^2 - 6x$

الدالة f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x) = 6x - 6$

الدالة f'' تنعدم عند العدد 1 و تغير الإشارة إذن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف إحداثياها $(1 ; 2)$.

تمرين 2

• عين الدالة المشتقة من المرتبة n لكل من الدالتين sin و cos ؛ n عدد طبيعي غير منعدم .

حل

1 • تعيين الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة sin.

الدالة : sin قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، n مرة حيث $n \geq 1$.

و من أجل كل عدد حقيقي x ، $(sin)'(x) = cos\, x = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$(sin)''(x) = (cos\, x)'(x) = -\,sin\, x = sin\,(x + \pi) = sin\left(x + 2\,\frac{\pi}{2}\right)$$

يمكن وضع التخمين التالي :

من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم، من أجل كل عدد حقيقي x ، $(sin)^{(n)}(x) = sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$

استعمال الاستدلال بالتراجع لإثبات صحة هذا التخمين.

من أجل $n = 1$ ؛ $(sin)^{(n)}(x) = sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$ أي $sin'(x) = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

نفرض أن من أجل العدد الطبيعي k غير المنعدم ، $(sin)^{(k)}(x) = sin\left(x + k\,\frac{\pi}{2}\right)$.

• حساب $(sin)^{(k+1)}(x)$.

لدينا $(sin)^{(k+1)}(x) = \left[sin\left(x + k\,\frac{\pi}{2}\right)\right]' = cos\left(x + k\,\frac{\pi}{2}\right) = sin\left(x + (k+1)\,\frac{\pi}{2}\right)$

ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي k غير منعدم و من أجل كل عدد حقيقي x ،

إذا كان $(sin)^{(k)}(x) = sin\left(x + k\,\frac{\pi}{2}\right)$ فإن $(sin)^{(k+1)}(x) = sin\left(x + (k+1)\,\frac{\pi}{2}\right)$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم ؛ $(sin)^{(n)}(x) = sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$

و بالتالي الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة sin هي الدالة $sin^{(n)}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$sin^{(n)}(x) = sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

2 • نبرهن بنفس الطريقة أن الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة cos هي الدالة $cos^{(n)}$ المعرفة على $\mathbb{R}$

كما يلي : $cos^{(n)}(x) = cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$.

8 حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = f(x)$ أو $y'' = f(x)$ حيث f دالة مألوفة

تمرين

• حل كل معادلة التفاضلية من المعادلات التالية :

1. $y' = 3x - 2$
2. $y' = sin\, x$
3. $y' = x + sin\, x$
4. $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$
5. $y' = \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$
6. $y'' = 2$
7. $y'' = sin\, x$
8. $y'' = cos\, x$

حل

1 • حل المعادلة التفاضلية $y' = 3x - 2$.

نبحث عن الدوال العددية f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $f'(x) = 3x - 2$.

الدالة f حيث $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x$ تحقق المعالة التفاضلية $y' = 3x - 1$ لأن $f'(x) = 3x - 2$.

ينتج أن الدوال العددية حلول المعادلة التفاضلية $y' = 3x - 2$ هي الدوال f المعرفة كما يلي :

$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + c$ حيث c عدد حقيقي.

2 • حل المعادلة التفاضلية $y' = \sin x$.

نبحث عن الدوال العددية f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $f'(x) = \sin x$.

نعلم أن $\cos' x = -\sin x$

إذن $-\cos' x = \sin x$ أي $(-\cos)'(x) = \sin x$

و بالتالي الدالة $\cos$ - هي حل للمعادلة التفاضلية $y' = \sin x$. ينتج أن الدوال العددية حلول المعادلة التفاضلية $y' = \sin x$ هي الدوال f المعرفة كما يلي : $f(x) = -\cos x + c$ حيث c عدد حقيقي.

3 • حل المعادلة التفاضلية $y' = x + \sin x$.

باستعمال النتائج المحصل عليها في الحالتين السابقتين، تكون حلول المعادلة التفاضلية $y' = x + \sin x$ هي الدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \cos x + c$

حيث c عدد حقيقي.

4 • حلول المعادلة التفاضلية $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ هي الدوال f المعرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ كما يلي :

$f(x) = 2\sqrt{x} + c$ حيث c عدد حقيقي.

5 • حلول المعادلة التفاضلية $y' = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ هي الدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x) = 2\sqrt{x^2+x+1}$ حيث c عدد حقيقي.

6 • حلول المعادلة التفاضلية $y'' = 2$ هي الدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x) = x^2 + cx + d$ حيث c و d عددان حقيقيان.

7 • حلول المعادلة التفاضلية $y'' = \sin x$ هي الدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x) = -\sin x + cx + d$ حيث c و d عددان حقيقيان.

8 • حلول المعادلة التفاضلية $y'' = \cos x$ هي الدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x) = -\cos x + cx + d$ حيث c و d عددان حقيقيان.

تمرين

• f هي الدالة المعرفة كما يلي : $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2}$

$(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و مجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1 • عين مجموعة تعريف D للدالة f.

2 • أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x^2}$

حيث a ، b ، c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

3 • عين نهايات الدالة f عند حدود المجموعة D.

4 • ادرس تغيرات الدالة f و انجز جدول تغيراتها.

5 • ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C})$.

6 • ادرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم المقارب (Δ) للمنحنى $(\mathscr{C})$.

7 • احسب $f(-1)$. ماذا تستنتجه ؟ ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$ في المعلم السابق.

8 • ناقش بيانيا ، عدد و إشارة حلول المعادلة $2x^3 + (1-m)x^2 + 1 = 0$ في $\mathbb{R}$

حسب قيم العدد الحقيقي m.

حل

1 • الدالة f معرفة على $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$. إذن $D =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

2 • من أجل كل عدد حقيقي x من D ،

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2} = 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من D ؛ $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x^2}$ إذن $a = 2$ ؛ $b = 1$ ؛ $c = 1$

3 • تعيين نهايات الدالة f عند حدود المجموعة D.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

(f هي مجموعة دالتين f_1 و f_2 حيث $f_1(x) = 2x + 1$ و $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2}$).

$\lim\limits_{x \to 0} (2x^3 + x^2 + 1) = 1$ و $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ و من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ؛ $x^2 > 0$

إذن $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = +\infty$ أي $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

4 • الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty ; 0[$ و $]0 ; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ؛ $f'(x) = 2 - \dfrac{2}{x^3}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^3} = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$$

دراسة إشارة $f'(x)$ على D.

من الجدول المقابل، ينتج أن الدالة f متزايدة على كل من المجالين $]-\infty ; 0[$ و $[1 ; +\infty[$ و متناقصة على المجال $]0 ; 1]$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x - 1$	-	‖ -	0	+
$x^2 + x + 1$	+	‖ +		+
x^3	-	‖ +		+
$f'(x)$	+	‖ -	0	+

جدول تغيرات الدالة يكون كالآتي :

نلاحظ أن النقطة ذات الإحداثيين $(1 ; 4)$ هي نقطة حدية صغرى للمنحنى $(\mathscr{C})$ على المجال $]0 ; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	‖ -	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	‖ $+\infty$ ↘	4	↗ $+\infty$

5 • دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C})$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ إذن المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$، يوازي محور التراتيب.

من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ؛ $f(x) - 2x - 1 = \frac{1}{x^2}$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (2x+1)\right) = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - (2x+1)\right) = 0$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$.

6 • دراسة الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم المقارب المائل (Δ).

دراسة إشارة العبارة $f(x) - (2x + 1)$ على D.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $f(x) - (2x+1) = \frac{1}{x^2}$

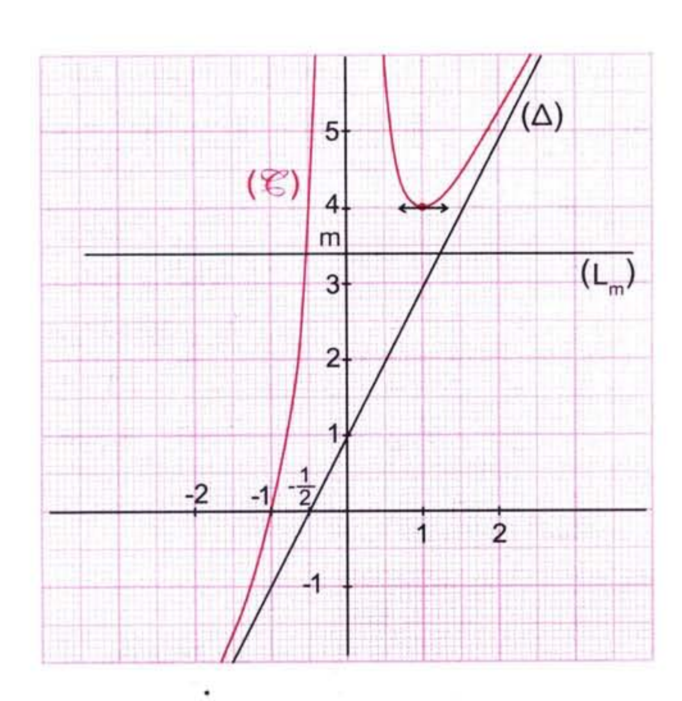
نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $\frac{1}{x^2} > 0$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $f(x) - (2x+1) > 0$

ينتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ فوق المستقيم المقارب المائل (Δ).

7• $f(-1) = 0$. نستنتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الإحداثيين $(-1 ; 0)$.

8 • رسم المنحنى $(\mathscr{C})$.



9 • مناقشة عدد و إشارة حلول المعادلة $2x^3 + (1-m)x^2 + 1 = 0$ في $\mathbb{R}$ بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m.

المعادلة $2x^3 + (1-m)x^2 + 1 = 0$ تكتب على الشكل $m = \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2}$ حيث x ينتمي إلى D.

أو أيضا $f(x) = m$ حيث x ينتمي إلى D.

معادلة المنحنى $(\mathscr{C})$ هي $y = f(x)$.

ليكن (L_m) المستقيم ذا المعادلة $y = m$ ؛ m عدد حقيقي.

حلول المعادلة $f(x) = m$ هي فواصل نقطة تقاطع $(\mathscr{C})$ و (L_m).

النتائج تلخص في الجدول الموالي :

m	$-\infty$	4	$+\infty$
النتائج	المعادلة تقبل حلا واحدا سالبا	المعادلة تقبل حلا سالبا و حلا مضعفا موجبا و هو 1.	المعادلة تقبل ثلاثة حلول : حل سالب و حلان مختلفان موجبان.

ابلية الاشتقاق - العدد المشتق

1 ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد x_0
عين العدد المشتق لها عند x_0 في كل حالة من
الات التالية :

- $x_0 = 1$ ؛ $f: x \longmapsto -\frac{x^2}{2} + 3x - 1$
- $x_0 = 5$ ؛ $f: x \longmapsto \frac{x+2}{-x+7}$
- $x_0 = -2$ ؛ $f: x \longmapsto 3x^5 - 4x^3 + 21$
- $x_0 = 0$ ؛ $f: x \longmapsto 2 - x + x \sin |x|$
- $x_0 = \frac{\pi}{4}$ ؛ $f: x \longmapsto \cos x$
- $x_0 = 0$ ؛ $f: x \longmapsto (2x-3)^2$
- $x = 0$ ؛ $f: x \longmapsto x\sqrt{x}$
- $x_0 = 0$ ؛ $f: x \longmapsto |x|$

عادلة المماس

2 عين معادلة المماس (أو نصف مماس) للمنحنى
مثل للدالة f عند النقطة A ذات الفاصلة x_0
ي كل حالة من الحالات التالية :

- $x_0 = 3$ ؛ $f(x) = x^2 + x - 5$
- $f(x) = \sqrt{1-x}$ إذا كان $x < 1$
  $f(1) = 0$
  $f(x) = -\sqrt{x-1}$ إذا كان $x > 1$
  و $x_0 = 1$.
- $x_0 = 2$ ؛ $f(x) = |x^3 - 8|$
- $x_0 = 0$ ؛ $f(x) = \sqrt{x}$
- $x_0 = 2$ ؛ $f(x) = \sqrt{|x-2|}$
- $x_0 = 1$ ؛ $f(x) = x^2 + 2|x-1|$
- $x_0 = -2$ ؛ $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$

لدوال المشتقة

3 f دالة معرفة على مجموعة D.
ين المجموعة D و المجموعة D′ التي تقبل عليها f
لاشتقاق ثم عين الدالة المشتقة f' للدالة f
في كل حالة من الحالات التالية :

1. $f: x \longmapsto \frac{x^3 + x^2 + 3}{x}$
2. $f: x \longmapsto \frac{2x^2 - 5x + 4}{x - 2}$
3. $f: x \longmapsto \frac{3x^2 - 4x}{4(1-x)}$
4. $f: x \longmapsto \frac{x^3 + 4x^2 + x - 2}{(x+1)^2}$
5. $f: x \longmapsto \frac{x^2 + 3x + 6}{2(x+1)}$
6. $f: x \longmapsto 2x + 1 - \frac{2}{(1-x)^2}$
7. $f: x \longmapsto x + 3\sqrt{x^2 - 1}$
8. $f: x \longmapsto (x-1)\sqrt{2x}$
9. $f: x \longmapsto \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$
10. $f: x \longmapsto \frac{1}{4} - \left(\frac{2x+1}{4}\right)\cos \pi x$
11. $f: x \longmapsto \sqrt{\cos 2x}$
12. $f: x \longmapsto \frac{1 + \cos 2x}{1 - \sin 2x}$

الإستمرارية و قابلية الاشتقاق

4 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :
$$f(x) = 1 - (x-1)\,|x-1|$$
- ادرس إستمرارية f عند العدد 1.
- ادرس قابلية اشتقاق f عند العدد 1.

5 f هي دالة معرفة كمايلي :
$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x}$$
1. عين مجموعة تعريف الدالة f .
2. نعرف الدالة g كما يلي :

$g(x) = f(x)$ إذا كان $x \neq 0$ و $g(0) = 0$
هل الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0 ؟
هل الدالة g مستمرة عند 0 ؟

إتجاه التغيرات

6 عين مجموعة تعريف الدالة f ثم أدرس إتجاه تغيراتها على هذه المجموعة في كل حالة من الحالات التالية :

1 • $f(x) = x^3(1 - x)^3$

2 • $f(x) = x - 5\sqrt{x}$

3 • $f(x) = \frac{3x^2 - x - 1}{x - 2}$

4 • $f(x) = -x + 1 - \frac{4}{x^2}$

5 • $f(x) = x + \sin x$

6 • $f(x) = x - \tan x$

7 • $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 4x^3$

8 • $f(x) = \frac{2x - 5}{x + 1}$

9 • $f(x) = \frac{x + 1}{2x - 5}$

10 • $f(x) = 4x^3 - 6x^2$

الدوال المشتقة المتتابعة

7 f دالة معرفة كما يلي : $f(x) = \frac{1}{x - 1}$

بين أن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم، الدالة f قابلة للاشتقاق n مرة عند كل عدد حقيقي يختلف عن 1.

عين، بدلالة n ؛ عبارة $f^{(n)}(x)$ من أجل x من $\mathbb{R} - \{1\}$.

8 عين الدوال المشتقة المتتابعة للدوال f في الحالات التالية :

1 • $f: x \longmapsto x^5 - 2x^4 + x^2 - x + 1$

2 • $f: x \longmapsto \frac{1}{2x - 1}$

3 • $f: x \longmapsto \sin 2x$

9 f دالة معرفة كما يلي :

$f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.

بين أن الدالة f تحقق المعادلة التفاضلية

$y'' + 9y = 0$

مسائل

10 f دالة معرفة كمايلي : $= \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$ (:

$(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنس

إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1 • ادرس تغيرات الدالة f .

2 • أنجز جدول تغيرات الدالة f .

3 • عين إحداثيي A نقطة تقاطع $(\mathscr{C})$ مع مح

الفواصل. ما هي معادلة المماس عند A ؟

4 • بين أن النقطة A مركز تناظر المنحنى $(\mathscr{C})$

5 • ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$ و المماس عند A.

الوحدة 2 cm.

11 أ) f دالة كثير الحدود معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1 • ادرس تغيرات الدالة f .

2 • بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا α

حيث $1,6 < \alpha < 1,7$.

ب) g هي الدالة المعرفة على المجال $]-1 ; +\infty[$

كما يلي : $g(x) = \frac{1 - x}{1 + x^3}$.

$(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة g في المستوي المنس

إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

الوحدة 4 cm.

1 • ادرس تغيرات الدالة g (بإمكانك إستعمال

نتائج السؤال 1).

2 • عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى $(\mathscr{C})$ عند

النقطة A فاصلتها 0.

3 • ادرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المماس

(Δ) في المجال $]-1 ; 1[$. بين أن $(\mathscr{C})$ يقطع (

عند النقطة ذات الفاصلة 1.

4 • ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$، المماس (Δ) و المماس (T

عند النقطة ذات الفاصلة 1.

12 f دالة معرفة كمايلي: $f(x)=\dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$

• عين العددين a و b حتى يقبل المنحنى الممثل
لدالة f مماسا عند النقطة $O(0\,;0)$ يوازي
المستقيم (D) ذا المعادلة $y=4x+3$.

• ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$
الممثل لها بعناية في معلم متعامد و متجانس
مناسب $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

13 حل كل معادلة من المعادلات التفاضلية التالية:

1. $y'=0$
2. $y'=-5$
3. $y'=\sqrt{2}x-1$
4. $y'=\dfrac{3}{\sqrt{x}}$
5. $y'=x-\cos 2x$
6. $y''=0$
7. $y''=\dfrac{1}{2}$
8. $y''=x-2$
9. $y''=\dfrac{1}{2}x+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$
10. $y''=\sin\dfrac{\pi}{3}x$

14 لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]a\,;+\infty[$
كما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{x-a}$

1. احسب $f'(x)$ ؛ $f''(x)$ ؛ $f'''(x)$.
2. خمن عبارة $f^{(n)}(x)$ من أجل n عدد طبيعي
غير منعدم.
برهن بالتراجع، صحة هذا التخمين.
3. لتكن g الدالة المعرفة على المجال $]1\,;+\infty[$
كما يلي : $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$
عين عددين حقيقيين α و β حيث من أجل كل عدد
من المجال $]1\,;+\infty[$ ، $g(x)=\dfrac{\alpha}{x+1}+\dfrac{\beta}{x-1}$.
احسب $g^{(n)}(x)$ من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم.

15 المستوي منسوب إلى معلم متعامد
و متجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ) • ارسم المنحى $(\mathscr{C}_g)$ الممثل للدالة g
المعرفة كما يلي : $g(x)=x^2-x$

ب) • لتكن h الدالة المعرفة كما يلي :
$$h(x)=2x^3+3x^2-5$$
• احسب $h(1)$. حلل $h(x)$ إلى جداء عوامل.
• ادرس إشارة $h(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x.

2. نريد دراسة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$
كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3-x+4}{x+1}$.
ليكن $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل لها.

أ) • ادرس تغيرات الدالة f.

ب) • بين أن من أجل كل عدد حقيقي x
من $\mathbb{R}-\{-1\}$ ؛ $f(x)=ax^2+bx+\dfrac{c}{x+1}$
حيث a، b، c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

جـ) • ادرس الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathscr{C}_g)$ و $(\mathscr{C}_f)$.

د) • ارسم بعناية المنحنيين $(\mathscr{C}_g)$ و $(\mathscr{C}_f)$
في نفس المعلم.

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي

و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.



Hard_equation

3 - الدوال الأصلية



• **تعريف دالة أصلية لدالة**

f دالة معرفة على مجال I. نسمي دالة أصلية للدالة f على I كل دالة F معرفة و قابلة للاشتقاق على I حيث من أجل كل عدد x من I ، $F'(x) = f(x)$.

• **مبرهنة (وجود دالة أصلية)**

كل دالة معرفة و مستمرة على مجال I تقبل على الأقل دالة أصلية على هذا المجال.

• **مبرهنة**

إذا كانت f دالة معرفة على مجال I و F دالة أصلية لها على I
فإن الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال G المعرفة على I كما يلي :
من أجل كل عدد x من I، $G(x) = F(x) + c$ حيث c عدد حقيقي.

• **مبرهنة**

f دالة معرفة و مستمرة على مجال I و F دالة أصلية لها على I.
إذا كان $x_0 \in I$ و $y_0 \in \mathbb{R}$ فإنه توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f حيث $y_0 = G(x_0)$ و معرفة على I كما يلي : من أجل كل عدد x من I، $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$.

. نتيجة : إذا كانت f دالة معرفة على مجال I و F دالة أصلية لها على I فإن الدالة $x \longmapsto F(x) - F(x_0)$ المعرفة على I هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I و التي تنعدم عند x_0.

• **دوال أصلية لدوال مألوفة**

الدالة f هي الدالة ...	الدوال الأصلية للدالة f هي الدوال F ...	مجال تعريف I للدالتين f و F
$x \longmapsto k$ حيث $k \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto kx + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$	$x \longmapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	إذا كان $n \geq 1$ فإن $I = \mathbb{R}$ إذا كان $n \leq -2$ فإن $I =]0 ; +\infty[$ أو $I =]-\infty ; 0[$
$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \longmapsto 2\sqrt{x} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I =]0 ; +\infty[$
$x \longmapsto \cos x$	$x \longmapsto \sin x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin x$	$x \longmapsto -\cos x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos(ax + b)$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin(ax + b)$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \longmapsto \tan x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I =]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

- **استعمال دساتير دوال مشتقة**

u دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I و c عدد حقيقي.

الدالة f معرفة كما يلي ...	الدوال الأصلية F للدالة f معرفة كما يلي ...	ملاحظات
$f(x) = u'(x) . u(x)^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot u(x)^{n+1} + c$	إذا كان $n > 0$ فإن $I = \mathbb{R}$ إذا كان $n < 0$ و $n \neq -1$ فإن $I = \mathbb{R}$ باستثناء الأعداد x من I حيث $u(x) = 0$
$f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$F(x) = 2\sqrt{u(x)} + c$	$I = \mathbb{R}$ باستثناء الأعداد x من I حيث $u(x) \leq 0$.
$f(x) = [\cos u(x)].u'(x)$	$F(x) = \sin u(x) + c$	I
$f(x) = [\sin u(x)].u'(x)$	$F(x) = -\cos u(x) + c$	I
$f(x) = (v' \circ u)(x).u'(x)$	$F(x) = (v \circ u)(x) + c$	v هي دالة قابلة للاشتقاق على المجال J حيث $f(I) \subset J$.

- ملاحظة : يمكن لدالة أن تكون غير قابلة للاشتقاق على مجال و تقبل دوالا أصلية على هذا المجال.

الدالة $x \longmapsto \sqrt{x}$ مستمرة على $[0 ; +\infty[$ و قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ لكنها تقبل على الأقل دالة أصلية على $[0 ; +\infty[$ مثل الدالة $x \longmapsto \frac{2}{3} x\sqrt{x}$.

1 تعيين دوال أصلية بسيطة

تمرين 1

F دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4$

و f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 6x^2 - 2x + 3$

1- بين أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

2- عين دالة أصلية أخرى G للدالة f على $\mathbb{R}$.

حل

• الدالة F دالة كثير الحدود. إذن F معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $F'(x) = 6x^2 - 2x + 3$. نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $F'(x) = f(x)$.

ينتج أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$. و بالتالي الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x \longmapsto F(x) + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

• لإيجاد دالة أصلية أخرى G للدالة f على $\mathbb{R}$، يكفي تغيير الحد الثابت في عبارة $F(x)$.

الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $G(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$ هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

تمرين 2

1- أوجد دالة أصلية لكل من الدالتين f و g المعرفتين على I و J كما يلي:

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 4$ و $I = \mathbb{R}$ ؛ $g(x) = \frac{1}{x^2}$ و $J =]0 ; +\infty[$.

2- أوجد كل الدوال الأصلية لكل دالة من الدالتين f و g .

حل

• الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4^x$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

و من أجل كل عدد حقيقي x ، $F'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 4$.

$= f(x)$

إذن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

الدالة G المعرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ كما يلي : $G(x) = -\frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0 ; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0 ; +\infty[$ ، $G'(x) = \frac{1}{x^2}$ إذن الدالة G هي دالة أصلية للدالة g على المجال $]0 ; +\infty[$.

• الدوال $x \longmapsto \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$ هي الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

الدوال $x \longmapsto -\frac{1}{x} + c'$ حيث $c' \in \mathbb{R}$ هي الدوال الأصلية للدالة g على $]0 ; +\infty[$.

2 إيجاد الدالة الأصلية لدالة التي تأخذ قيمة y_0 عند العدد x_0

تمرين

f و g الدالتان المعرفتان على المجال I كما يلي : $I=\mathbb{R}$; $f(x)=x^2-x$; $I=]-\infty;0[$; $g(x)=-\frac{1}{x^2}$

1- عين الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تأخذ القيمة 1 عند العدد 0.

2- عين الدالة الأصلية G للدالة g على $]-\infty ; 0[$ و التي تنعدم عند العدد 2- .

حل

• الدوال H المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $H(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c$ ؛ $c \in \mathbb{R}$ هي الدوال الأصلية لـ f على $\mathbb{R}$. لدينا $H(0) = 1$ أي $\frac{1}{3}(0)^3 - \frac{1}{2}(0)^2 + c = 1$. إذن $c = 1$. هذه الدالة الأصلية F للدالة f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$

• الدوال L المعرفة على $]-\infty ; 0[$ كما يلي : $L(x) = \frac{1}{x} + \lambda$ ؛ $\lambda \in \mathbb{R}$ هي الدوال الأصلية للدالة g على $]-\infty ; 0[$. لدينا $L(-2) = 0$ أي $\frac{1}{-2} + \lambda = 0$ إذن $\lambda = \frac{1}{2}$.

ينتج أن الدالة الأصلية للدالة g على المجال $]-\infty ; 0[$ و التي تنعدم عند 2- هي الدالة G المعرفة على المجال $]-\infty ; 0[$ كما يلي : $G(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$.

3 استعمال الدوال الأصلية لدوال مألوفة

تمرين 1

عين الدوال الأصلية لكل دالة من الدوال f على المجال I في الحالات التالية :

1) $f(x) = x^5 + x^2 - 3x + 6$ ؛ $I = \mathbb{R}$ 2) $f(x) = \frac{3}{x^2} - \cos x + 3$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$

3) $f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} + \sin x - 1$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$ 4) $f(x) = \cos 3x$ ؛ $I = \mathbb{R}$

5) $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ؛ $I = \mathbb{R}$

حل

1. الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^5 + x^2 - 3x + 6$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

2. الدوال الأصلية للدالة f على $]0 ; +\infty[$ حيث $f(x) = \frac{3}{x^2} - \cos x + 3$ هي الدوال F المعرفة على $]0 ; +\infty[$ كما يلي : $F(x) = -\frac{3}{x} - \sin x + 3x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

3. الدوال الأصلية للدالة f على $]0 ; +\infty[$ حيث $f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} + \sin x - 1$ هي الدوال F المعرفة على $]0 ; +\infty[$ كما يلي $F(x) = -4\sqrt{x} - \cos x - x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

4. الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ حيث $f(x) = \cos 3x$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = \frac{1}{3}\sin 3x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

5. الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ حيث $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = -\frac{1}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

تمرين 2

في كل حالة من الحالات التالية، تعرف على عبارة الدالة f ثم عين دالة أصلية للدالة f على المجال I

1) $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ ؛ $I = \mathbb{R}$.
2) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ؛ $I = \mathbb{R}$.
3) $f(x) = (x-2)(x^2-4x+1)^3$ ؛ $I = \mathbb{R}$.
4) $f(x) = \cos x \cdot \sin^4 x$ ؛ $I = \mathbb{R}$.

حل

1 • بوضع $u(x) = x^2 + x + 1$. لدينا الدالة u معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $u'(x) = 2x + 1$. نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي x، $u(x) \neq 0$ و $f(x) = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$

إذن الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = \frac{-1}{u(x)} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$. أي الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$F(x) = \frac{-1}{x^2+x+1} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

2 • بوضع $u(x) = x^2 + 1$ و $v(x) = \sqrt{x}$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $u'(x) = 2x$. الدالة v قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0 ; +\infty[$ ، $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. لدينا $(v' \circ u)(x) = v'[(x^2+1)] = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$

نلاحظ أن الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$$f(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x)$$
$$= (v \circ u)'(x)$$

ينتج أن الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $v \circ u$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$(v \circ u)(x) = v[u(x)] + c$$
$$= v(x^2+1) + c$$
$$= \sqrt{x^2+1} + c$$

أي الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = \sqrt{x^2+1} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

• ملاحظة : بوضع $u(x) = x^2 + 1$ ؛ الدالة u معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد x $u(x) > 0$. لدينا أيضا من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $u'(x) = 2x$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f(x) = \frac{u(x)}{2\sqrt{u(x)}}$. و بالتالي الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{u(x)} + c$ ، $c \in \mathbb{R}$.

أي : من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f(x) = \sqrt{x^2+1} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

3 . بوضع $u(x) = x^2 - 4x + 1$ ، الدالة u معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد x

$u'(x) = 2x - 4$. نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f(x) = \frac{1}{2} u'(x) \times u^3(x)$

إذن الدوال الأصلية للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = (x - 2) \times (x^2 - 4x + 1)^3$ هي الدوال

F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} u^4(x) + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

أي : من أجل عدد حقيقي x ؛ $F(x) = \frac{1}{8} (x^2 - 4x + 1)^4 + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

4 . بوضع $u(x) = \sin x$ ، الدالة u معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و من أجل كل عدد حقيقي x ، $u'(x) = \cos x$.

نلاحظ أن : من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f(x) = u'(x) . u^4(x)$. ينتج أن الدوال الأصلية للدالة f

المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \cos x . \sin^4 x$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$

كما يلي : $F(x) = \frac{1}{5} u^5(x) + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

إذن الدوال الأصلية للدالة f هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = \frac{1}{5} \sin^5 x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

تمرين 1

f دالة معرفة على المجال $]1\,;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

1 . بين أنه يوجد عددان حقيقيان a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1\,;+\infty[$ ؛ $f(x)=a+\dfrac{b}{(x-1)^2}$

2 . عين الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]1\,;+\infty[$.

3 . حدد الدالة الأصلية G للدالة f التي تنعدم عند العدد 2.

حل

1 . الدالة f معرفة على المجال $]1\,;+\infty[$ و من أجل كل عدد x حيث $x>1$ ؛

$$f(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}=1-\frac{1}{(x-1)^2}$$

ينتج أن $a=1$ و $b=-1$. و بالتالي من أجل كل عدد x حيث $x>1$ ؛ $f(x)=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}$

. ملاحظة : يمكن توحيد المقامات في العبارة $a+\dfrac{b}{(x-1)^2}$ ثم مقارنة عبارتي $f(x)$.

2 . الدالة f معرفة على $]1\,;+\infty[$ و قابلة للاشتقاق على $]1\,;+\infty[$. نضع $u(x)=x-1$

الدالة u معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $]1\,;+\infty[$ و من أجل كل عدد x حيث $x>1$ ؛ $u'(x)=1$

لدينا من أجل كل عدد x، $f(x)=1-\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

إذن من أجل كل عدد x حيث $x>1$ ، $f(x)=\left[x+\dfrac{1}{u(x)}\right]'$

ينتج أن الدوال الأصلية للدالة f على $]1\,;+\infty[$ هي الدوال F المعرفة على $]1\,;+\infty[$ كما يلي :

$F(x)=x+\dfrac{1}{x-1}+c$ حيث $c\in\mathbb{R}$.

3 . تعيين الدالة الأصلية للدالة f حيث $F(2)=0$. لدينا $F(2)=0$ يعني $2+\dfrac{1}{2-1}+c=0$

أي $3+c=0$ إذن $c=-3$. ينتج أن الدالة الأصلية F للدالة f حيث $F(2)=0$

هي الدوال F المعرفة على $]1\,;+\infty[$ كما يلي $F(x)=x+\dfrac{1}{x-1}-3$.

تمرين 2

أوجد الدوال الأصلية على $\mathbb{R}$ لكل من الدالتين f و g المعرفتين كمايلي :

$$g(x) = \sin^4 x \quad ; \quad f(x) = \cos^4 x$$

حل

• تعيين العبارة الخطية لكل من $\cos^4 x$ و $\sin^4 x$.

نضع $\cos x + i \sin x = e^{ix}$ و $\cos x - i \sin x = e^{-ix}$ (ترميز أولير)

إذن $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ و $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$.

ينتج أن $\cos^4 x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 (e^{ix} + e^{-ix})^4$ و $\sin^4 x = \left(\frac{1}{2i}\right)^4 (e^{ix} - e^{-ix})^4$.

لدينا $(e^{ix} + e^{-ix})^4 = e^{i4x} + 4e^{i3x}e^{-ix} + 6e^{i2x}e^{-i2x} + 4e^{ix}e^{-i3x} + e^{-i4x}$

$$= (e^{i4x} + e^{-i4x}) + 4(e^{i2x} + e^{-i2x}) + 6$$

$$= 2\cos 4x + 8\cos 2x + 6$$

و بالتالي $\cos^4 x = \frac{1}{16}(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6)$

أي أن $\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$

لدينا أيضا $(e^{ix} - e^{-ix})^4 = e^{i4x} - 4e^{i3x}e^{-ix} + 6e^{i2x}e^{-i2x} - 4e^{ix}e^{-i3x} + e^{-i4x}$

$$= (e^{i4x} + e^{-i4x}) - 4(e^{i2x} + e^{-i2x}) + 6$$

$$= 2\cos 4x - 8\cos 2x + 6$$

و بالتالي $\sin^4 x = \frac{1}{16}(2\cos 4x - 8\cos 2x + 6)$

أي أن $\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$

إذن الدالتان f و g معرفتان كما يلي :

$$g(x) = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8} \quad و \quad f(x) = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

ينتج أن الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$F(x) = \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

الدوال الأصلية للدالة g على $\mathbb{R}$ هي الدوال G المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$G(x) = \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + c'$ حيث $c' \in \mathbb{R}$.

تمارين و مسائل

عموميات على الدوال الأصلية

1 في كل حالة من الحالات التالية، اثبت أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

1. $f(x) = 3x^2 - 1$
$F(x) = (x-2)(x^2+2x+3)$ ؛ $I = \mathbb{R}$

2. $f(x) = \sqrt{x+1}$
$F(x) = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}$ ؛ $I =]-1 ; +\infty[$

3. $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{x^3}\right)$
$F(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$

4. $f(x) = \cos x - x \sin x$
$F(x) = x \cos x$ ؛ $I = \mathbb{R}$

مجموعة الدوال الأصلية - الشروط الأولية

2 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 2 \sin 2x$. عين، من بين الدوال التالية، دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

$F : x \longmapsto 2 \sin^2 x$ ؛ $G : x \longmapsto \sin 2x$

$H : x \longmapsto 1 + \cos^2 x$ ؛ $L : x \longmapsto 7 - \cos 2x$

3 أوجد الدالة الأصلية F للدالة f على I حيث $f(x_0) = y_0$ في الحالات التالية :

1. $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$ ؛ $I = \mathbb{R}$
$x_0 = 1$ ؛ $y_0 = 0$

2. $f(x) = -2 \sin 2x$ ؛ $I = \mathbb{R}$
$x_0 = \frac{\pi}{4}$ ؛ $y_0 = 1$

3. $f(x) = \cos 3x$ ؛ $I = \mathbb{R}$
$x_0 = \frac{\pi}{2}$ ؛ $y_0 = 0$

4. $f(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$
$x_0 = 1$ ؛ $y_0 = 1$

إستعمال جدول الدوال المشتقة

4 عين الدوال الأصلية لكل دالة f من الدوال التالية على المجال I.

1. $f(x) = x^3 - 2x + 1$ ؛ $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$
3. $f(x) = \sin x - 2\cos x$ ؛ $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$ ؛ $I =]-\infty ; 0[$
5. $f(x) = \cos\left(\frac{x-\pi}{4}\right)$ ؛ $I = \mathbb{R}$
6. $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos x^2}$ ؛ $I = \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$
7. $f(x) = (x-3)^4$ ؛ $I = \mathbb{R}$
8. $f(x) = \sin x \cos^2 x$ ؛ $I = \mathbb{R}$
9. $f(x) = 4x(x^2+4)^2$ ؛ $I = \mathbb{R}$
10. $f(x) = \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$
11. $f(x) = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$
12. $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ ؛ $I =]3 ; +\infty[$
13. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$ ؛ $I = \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$
14. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ ؛ $I = \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$
15. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ؛ $I =]-1 ; +\infty[$
16. $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{3 + \sin x}}$ ؛ $I = \mathbb{R}$
17. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ؛ $I =]-1 ; 1[$
18. $f(x) = x \cos x + \sin x$ ؛ $I = \mathbb{R}$
19. $f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ ؛ $I =]-1 ; +\infty[$
20. $f(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ؛ $I = \mathbb{R}$

تعيين دوال أصلية

5 عين الدوال الأصلية لكل دالة f من الدوال التالية المعرفة على المجال I.

1. $f(x) = \cos x \sin^3 x$ ؛ $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \sin x \cos^2 x$ ؛ $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \cos x \sin^2 x$ ؛ $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \frac{5}{(x+5)^5}$ ؛ $I =]-\infty ; -5[$
5. $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{x}$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$
6. $f(x) = \frac{x^2}{(1+x^3)^2}$ ؛ $I =]-1 ; +\infty[$
7. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}$ ؛ $I = \mathbb{R}$

6 f هي الدالة المعرفة على المجال $]1 ; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x^2 - 1)^2}$

و F هي الدالة المعرفة على المجال $]1 ; +\infty[$ كمايلي : $F(x) = \frac{-x - 2}{x^2 - 1}$

برهن أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]1 ; +\infty[$.

7 f و F دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x) = -3x^2 + 4x + 1$

و $F(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 1$

1. برهن أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
2. عين كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

8 عين الدوال الأصلية للدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

1. $f(x) = -x + 3$ ؛ $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = x^2 + x$ ؛ $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = 2x^3 - x + 1$ ؛ $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \frac{2}{x^3}$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$
5. $f(x) = \frac{-3}{x^3} + \cos x$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$
6. $f(x) = \frac{6}{\sqrt{x}} - x - 2$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$
7. $f(x) = \sin 2x + \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$ ؛ $I = \mathbb{R}$

مسائل

9 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{4 + \sin x}}$

1. عين الدالة الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تأخذ القيمة 4 عند العدد 0.
2. عين كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

10 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x^3 + 27}{2x^2}$

1. بين أنه يوجد عددان حقيقيان a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}_+^*$.

$$f(x) = ax + \frac{b}{x^2}$$

2. عين كل الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]0 ; +\infty[$.
3. عين الدالة الأصلية F للدالة f التي تأخذ القيمة 1 عند العدد 1.

11 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 3x^2(x^2 + 1) + 2x(x^3 + 1)$

1. عين الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
2. ما هي الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ التي تنعدم عند العدد 0؟

12 عين الدوال الأصلية للدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x) = \cos^3 x$ و $g(x) = \sin^3 x$

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي

و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة. 

Hard_equation



1 . تعريف الدالة الأسية

الدالة الأسية، و يرمز لها exp، هي الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y' = y$ الذي يحقق $\exp(0) = 1$

الدالة الأسية معرفة على $\mathbb{R}$ حيث من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $\exp'(x) = \exp(x)$ و $\exp(0) = 1$

2 . خواص

• خاصية 1: الدالة الأسية موجبة تماما على $\mathbb{R}$. (من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $\exp(x) > 0$)

• خاصية 2: الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.(من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $\exp'(x) > 0$)

• خاصية 3: الدالة الأسية مستمرة على $\mathbb{R}$.(الدالة exp قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ كونها حل للمعادلة التفاضلية $y' = y$).

3 . مبرهنة

من أجل كل عددين حقيقيين x و y ؛ $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

4 . نتائج

• من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

• من أجل كل عددين حقيقيين x و y ؛ $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

• من أجل كل عدد حقيقي x و من أجل كل عدد صحيح n ؛ $[\exp(x)]^n = \exp(nx)$.

5 . الترميز

نضع من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $\exp(x) = e^x$

إذن الدالة exp تكون معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $\exp(x) = e^x$.

6 . إستعمال الترميز

باستعمال الترميز e^x، نكتب : $e^0 = 1$ و $e^1 = e$ (e هو عدد أولر (Euler) حيث ... $e = 2{,}718$)

باستعمال الترميز e^x، نكتب أيضا :

• من أجل كل عددين حقيقيين x و y ؛ $e^{x+y} = e^x \times e^y$

• من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

• من أجل كل عددين حقيقيين x و y ؛ $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.

• من أجل كل عدد حقيقي x و من أجل كل عدد صحيح n ؛ $(e^x)^n = e^{nx}$

7 . دراسة الدالة exp

• الدالة exp معرفة على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $\exp(x) = e^x$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

• الدالة exp قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $(e^x)' = e^x$.

• الدالة exp موجبة تماما على $\mathbb{R}$ (أي من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $e^x > 0$).

• الدالة exp متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ (من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $(e^x)' > 0$).

• الدالة exp مستمرة على $\mathbb{R}$.

لأنها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

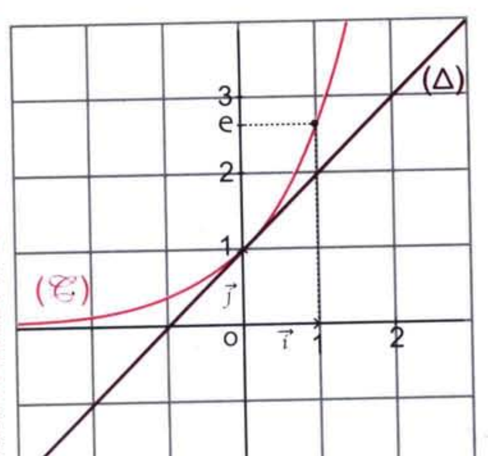
• جدول التغيرات الدالة exp يكون كما يلي :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\exp'(x)$	+
$\exp(x)$	0 ↗ $+\infty$

• التمثيل البياني



ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة exp في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.



• معادلة المماس (Δ) للمنحنى $(\mathscr{C})$ عند النقطة التي فاصلتها 0 هي : $y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0)$

لدينا $\exp(0) = e^0 = 1$ و $\exp'(0) = e^0 = 1$

إذن $(\Delta) : y = x + 1$

• محور الفواصل هو مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$.

• المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرع قطع مكافئ في اتجاه محور التراتيب بجوار $+\infty$.

8 . إشتقاق الدالة $x \longmapsto e^{u(x)}$

إذا كانت الدالة $x \longmapsto u(x)$ قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \longmapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I و من أجل كل عدد حقيقي x، $[e^{u(x)}]' = u'(x)\, e^{u(x)}$.

9 . النهايات

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty} x e^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

10 . خاصيتان

• من أجل كل عددين حقيقيين x و x' ؛ $e^x = e^{x'}$ إذا وفقط إذا كان $x = x'$.

• من أجل كل عددين حقيقيين x و x' ؛ $e^x < e^{x'}$ إذا وفقط إذا كان $x < x'$.

ملاحظة : يسمح تطبيق الخاصيتين السابقتين بحل معادلات و متراجحات في $\mathbb{R}$.

11 . المعادلة التفاضلية $y' = y$

حلول المعادلة التفاضلية $y' = y$ هي الدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = ke^x$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

1 إستعمال الترميز exp

تمرين 1

1. احسب العدد $\exp[(0,5)]^2$ بدلالة $\exp(1)$. استنتج قيمة $\exp(0,5)$.

2. عبر بدلالة $\exp(1)$ عن الأعداد التالية : $\exp(-2)$ ؛ $\exp(2-\sqrt{2})\times\exp(1+\sqrt{2})$

$\dfrac{\exp(0,5+x)}{\exp(1+x)}$ ؛ $[\exp(2)]^3$ ؛ $\dfrac{\exp(3)\times\exp(6)}{[\exp(4)]^2}$

حل

1. حساب العدد $[\exp(0,5)]^2$ بدلالة $\exp(1)$.

لدينا $[\exp(0,5)]^2 = \exp(0,5)\times\exp(0,5)$

$= \exp(0,5+0,5)^2 = \exp(1)$

إذن $[\exp(0,5)]^2 = \exp(1)$

• استنتاج قيمة $\exp(0,5)$.

لدينا $[\exp(0,5)]^2 = \exp(1)$ و $\exp(1) > 0$ إذن $\exp(0,5) = \sqrt{\exp(1)}$.

2. التعبير عن أعداد بدلالة $\exp(1)$.

• لدينا $\exp(-2) = \exp(0-2)$

$= \dfrac{\exp(0)}{\exp(2)} = \dfrac{1}{\exp(2)}$

و نعلم أن $\exp(2) = \exp(2\times1)$

$= [\exp(1)]^2$

إذن $\exp(-2) = \dfrac{1}{[\exp(1)]^2}$ أو أيضا $\exp(-2) = [\exp(1)]^{-2}$

• لدينا $\exp(2-\sqrt{2})\times\exp(1+\sqrt{2}) = \exp(2-\sqrt{2}+1-\sqrt{2})$

$= \exp(3)$

$= [\exp(1)]^3$

إذن $\exp(2-\sqrt{2})\times\exp(1+\sqrt{2}) = [\exp(1)]^3$

• لدينا $\dfrac{\exp(0,5+x)}{\exp(1+x)} = \exp(0,5+x-1-x)$

$= \exp(0,5-1)$

$= \exp(-0,5)$

$= \dfrac{1}{\exp(0,5)} = \dfrac{1}{\sqrt{\exp(1)}}$

إذن $\dfrac{\exp(0,5+x)}{\exp(1+x)} = \dfrac{1}{\sqrt{\exp(1)}}$

• لدينا $[\exp(2)]^3 = [(\exp(1)^2]^3$
$= [\exp(1)]^6$

إذن $[\exp(2)]^3 = [(\exp(1)]^6$

• لدينا $\dfrac{\exp(3)\times\exp(6)}{[\exp(4)]^2} = \dfrac{\exp(3+6)}{\exp(2\times4)} = \dfrac{\exp(9)}{\exp(8)}$

لدينا $= \exp(9-8) = \exp(1)$

إذن $\dfrac{\exp(3)\times\exp(6)}{[\exp(4)]^2} = \exp(1)$

2 استعمال الترميز e^x

تمرين 2

بسط العبارات التالية :

$\dfrac{2e^2\times e}{\sqrt{e}}$ ؛ $\dfrac{3\sqrt{e}}{e^3\times e^{-1}}$ ؛ $3e^{2x}(-2e^{-x+1})$ ؛ $\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2$ ؛ $\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$

$e^{-10x}\times(e^{-x+1})^2\times(e^{3x})^3$ ؛ $\left(\dfrac{e^{4x}+e^{-4x}}{2}\right)\left(\dfrac{e^{4x}-e^{-4x}}{2}\right)$ ؛ $\left(\dfrac{e^{-x+1}}{e^x-e^{-x}}\right)\times\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+1}\right)$

حل

• لدينا $\dfrac{2e^2\times e}{\sqrt{e}} = \dfrac{2e^{2+1}}{e^{\frac{1}{2}}} = 2e^3\times e^{-\frac{1}{2}} = 2e^{3-\frac{1}{2}} = 2e^{\frac{5}{2}}$

إذن $\dfrac{2e^2\times e}{\sqrt{e}} = 2e^{\frac{5}{2}}$

• لدينا $\dfrac{3\sqrt{e}}{e^3\times e^{-1}} = \dfrac{3e^{\frac{1}{2}}}{e^{3-1}} = \dfrac{3e^{\frac{1}{2}}}{e^2} = 3e^{\frac{1}{2}}\times e^{-2}$
$= 3e^{\frac{1}{2}-2} = 3e^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{e^{\frac{3}{2}}}$

إذن $\dfrac{3\sqrt{e}}{e^3\times e^{-1}} = 3e^{-\frac{3}{2}}$

• لدينا $3e^{2x}(-2e^{-x+1}) = 3(-2)\,e^{2x}\times e^{-x+1} = -6e^{2x-x+1} = -6e^{x+1}$

إذن $3e^{2x}(-2e^{-x+1}) = -6e^{x+1}$

• لدينا $\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{(e^x)^2+2e^xe^{-x}+(e^{-x})^2}{4}$
$= \dfrac{e^{2x}+2e^{x-x}+e^{-2x}}{4} = \dfrac{e^{2x}+2e^0+\frac{1}{e^{2x}}}{4} = \dfrac{e^{2x}+2+\frac{1}{e^{2x}}}{4}$

إذن $\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{2x}+2+\frac{1}{e^{2x}}}{4}$

• لدينا $\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{(e^x)^2-2e^xe^{-x}+(e^{-x})^2}{4} = \dfrac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = \dfrac{e^{2x}-2+\frac{1}{e^{2x}}}{4}$

إذن $\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{2x}-2+\frac{1}{e^{2x}}}{4}$

• لدينا $e^{-10x}\times(e^{-x+1})^2\times(e^{3x})^3 = e^{-10x}\times e^{2(-x+1)}\times e^{3(3x)} = e^{-10x}\times e^{-2x+2}\times e^{9x}$.

$$= e^{-10x-2x+2+9x} = e^{-3x+2}$$

إذن $e^{-10x}\times(e^{-x+1})^2\times(e^{3x})^3 = e^{-3x+2}$

• لدينا $\left(\frac{e^{4x}+e^{-4x}}{2}\right)\left(\frac{e^{4x}-e^{-4x}}{2}\right) = \frac{(e^{4x})^2-(e^{-4x})^2}{4} = \frac{e^{2(4x)}-e^{2(-4x)}}{4} = \frac{e^{8x}-e^{-8x}}{4} = \frac{e^{8x}-\frac{1}{e^{8x}}}{4}$

إذن $\left(\frac{e^{4x}+e^{-4x}}{2}\right)\left(\frac{e^{4x}-e^{-4x}}{2}\right) = \frac{e^{8x}-\frac{1}{e^{8x}}}{4}$

• $\left(\frac{e^{-x+1}}{e^x-e^{-x}}\right)\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}\right) = \frac{e^{-x}\times e\,(e^x-1)(e^x+1)}{\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)(e^x+1)}$

$$= \frac{e^{-x}\times e\times(e^x-1)}{\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x}\right)} = \frac{e^{-x}\times e\times(e^x-1)\times e^x}{(e^x-1)(e^x+1)}$$

$$= \frac{e^{-x}\times e^x\times e}{e^x+1} = \frac{e^{-x+x}\times e}{e^x+1} = \frac{e^0\times e}{e^x+1} = \frac{e}{e^x+1}$$

إذن $\left(\frac{e^{-x+1}}{e^x-e^{-x}}\right)\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}\right) = \frac{e}{e^x+1}$

3 حساب نهايات

تمرين 1

احسب النهاية عند $-\infty$ للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1. $f(x) = \frac{2e^x+1}{e^x-3}$
2. $f(x) = (2x-3)e^x$
3. $f(x) = 3e^{2x}-e^x+4$
4. $f(x) = \frac{e^{x+1}+\sqrt{e}}{1-e^x}$

حل

1. لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2e^x+1}{e^x-3}\right)$

نعلم أن $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ إذن $\lim_{x\to-\infty}(2e^x+1) = 1$ و $\lim_{x\to-\infty}(e^x-3) = -3$

و بالتالي $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2e^x+1}{e^x-3}\right) = -\frac{1}{3}$ أي $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$.

2. بما أن $\lim_{x\to-\infty} 2x\,e^x = 2\lim_{x\to-\infty} x e^x = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} 3e^x = 3\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

إذن $\lim_{x\to-\infty}(2x-3)e^x = 0$. و بالتالي $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

3. لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(3e^{2x}-e^x+4) = \lim_{x\to-\infty} 3e^{2x} + \lim_{x\to-\infty}(-e^x+4)$

$$= 0+4 = 4$$

إذن $\lim_{x\to-\infty}(2e^{2x}-e^x+4) = 4$. و بالتالي $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$.

4. لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{x+1}+\sqrt{e}}{1-e^{x}}\right)$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} (e^{x}\times e) = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} (1-e^{x}) = 1$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{x+1}+\sqrt{e}}{1-e^{x}}\right) = \frac{\sqrt{e}}{1} = \sqrt{e}$

و بالتالي $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \sqrt{e}$.

تمرين 2

احسب النهاية عند $+\infty$ للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1. $f(x) = e^{2x} - x^2$
2. $f(x) = e^{2x} - 2e^{x}$
3. $f(x) = (3x^2-1)e^{x}$
4. $f(x) = e^{3x+1} - 3x$

حل

1. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{2x}-x^2) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{e^{2x}}{x^2}-1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left[\left(\frac{e^{x}}{x}\right)^2-1\right]$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{e^{x}}{x}\right)^2-1\right] = +\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left[\left(\frac{e^{x}}{x}\right)^2-1\right] = +\infty$ و بالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{2x}-2e^{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}(e^{x}-2)$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{x}-2) = +\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}(e^{x}-2) = +\infty$ و بالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{2x}-2e^{x}) = +\infty$

ينتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2-1) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2-1)e^{x} = +\infty$

و بالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4. لدينا $e^{3x+1} - 3x = e^{3x}\times e - 3x = 3x\left(e\frac{e^{3x}}{3x}-1\right)$

و لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e\frac{e^{3x}}{3x}-1\right) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x\left(\frac{e^{3x}}{3x}-1\right) = +\infty$ و بالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{3x+1}-3x) = +\infty$

ينتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4 تعيين دوال مشتقة

تمرين

عين المجموعة التي تقبل عليها الدالة f الإشتقاق ثم عين الدالة المشتقة f' في كل حالة من الحالات التالية :

1. $f(x) = xe^x + x^2$
2. $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{x}$
3. $f(x) = (2x - 3)e^{3x-1}$
4. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{2x - 1}$

حل

1. $f(x) = xe^x + x^2$

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

و من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = e^x + xe^x + 2x$

$= (x + 1)e^x + 2x$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = (x + 1)e^x + 2x$

2. $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{x}$

الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty ; 0[$ و $]0 ; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ؛ $f'(x) = \dfrac{e^x(x) - (e^x + 1)}{x^2}$

$= \dfrac{(x - 1)e^x - 1}{x^2}$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ؛ $f'(x) = \dfrac{(x - 1)e^x - 1}{x^2}$

3. $f(x) = (2x - 3)e^{3x-1}$

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

و من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = 2e^{3x-1} + (2x - 3) \times 3e^{3x-1}$

$= (2 + 6x - 9)e^{3x-1} = (6x - 7)e^{3x-1}$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = (6x - 7)e^{3x-1}$.

4. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{2x - 1}$

الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[$ و $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

و من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن $\frac{1}{2}$ ؛ $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}(2x - 1) - 2e^{2x}}{(2x - 1)^2}$

$= \dfrac{4(x - 1)e^{2x}}{(2x - 1)^2}$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن $\frac{1}{2}$ ؛ $f'(x) = \dfrac{4(x - 1)e^{2x}}{(2x - 1)^2}$

5 حل معادلات و متراجحات

تمرين 1

حل في $\mathbb{R}$ كل معادلة من المعادلات التالية :

$e^{4+x^2} - e^{-4x} = 0$ ؛ $3e^{2x} - e^{x} - 1 = 0$ ؛ $e^{x^2} = e$ ؛ $e^{2x} - e^{x} = 0$ ؛ $e^{3x} = 1$

حل

1. حل المعادلة $e^{3x} = 1$

لدينا $e^{3x} = 1$ يعني $e^{3x} = e^{0}$ أي $3x = 0$

و بالتالي $x = 0$. ينتج أن المعادلة $e^{3x} = 1$ **تقبل حلا واحدا في** $\mathbb{R}$ و هو 0.

2. حل المعادلة $e^{2x} - e^{x} = 0$.

لدينا $e^{2x} - e^{x} = 0$ **يعني** $e^{2x} = e^{x}$ أي $2x = x$ و بالتالي $x = 0$.

ينتج أن المعادلة $e^{2x} - e^{x} = 0$ **تقبل حلا واحدا في** $\mathbb{R}$ و هو 0.

3. حل المعادلة $e^{x^2} = e$.

لدينا $e^{x^2} = e$ **يعني** $x^2 = 1$ أي $(x - 1)(x + 1) = 0$. و بالتالي $x = 1$ و $x = -1$.

ينتج أن المعادلة $e^{2x} = e$ **تقبل حلين مختلفين في** $\mathbb{R}$ هما 1 و -1 .

4. حل المعادلة $3e^{2x} - 2e^{x} - 1 = 0$ ... (1) نضع $e^{x} = X$.

$3e^{2x} - 2e^{x} - 1 = 0$ **يعني** $\begin{cases} 3X^2 - 2X - 1 = 0 \\ e^{x} = X \end{cases}$ أي $\begin{cases} (3X + 1)(X - 1) = 0 \\ e^{x} = X \end{cases}$

إذن $\left(X = 1 \text{ أو } X = -\frac{1}{3}\right)$ و $e^{x} = X$. ينتج أن $e^{x} = 1$ أو $e^{x} = -\frac{1}{3}$.

لدينا $e^{x} = 1$ إذن $x = 0$.

المعادلة $e^{x} = -\frac{1}{3}$ لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$ (لأن من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{x} > 0$)

و بالتالي $3e^{2x} - 2e^{x} - 1 = 0$ **تقبل حلا واحدا في** $\mathbb{R}$ و هو 0.

5. حل المعادلة $e^{4+x^2} - e^{-4x} = 0$.

لدينا $e^{4+x^2} - e^{-4x} = 0$ **يعني** $e^{4+x^2} = e^{-4x}$ أي $4 + x^2 = -4x$

أي $x^2 + 4x + 4 = 0$ أي $(x + 2)^2 = 0$ إذن $x = -2$.

ينتج أن المعادلة $e^{4+x^2} - e^{-4x} = 0$ **تقبل حلا واحدا في** $\mathbb{R}$ و هو -2.

تمرين 2

حل في $\mathbb{R}$ كل متراجحة من المتراجحات التالية :

$e^{-2x} \geq 1$ ؛ $e^{1+x^2} \leq e^{2x}$ ؛ $e^{x^2} e^x < (e^2)^3$.

حل

1 . حل المتراجحة $e^{-2x} \geq 1$ في $\mathbb{R}$.

لدينا $e^{-2x} \geq 1$ يعني $e^{-2x} \geq e^0$ أي $-2x \geq 0$ إذن $x \leq 0$

ينتج أن مجموعة حلول المتراجحة $e^{-2x} \geq 1$ هي $]-\infty ; 0]$.

2 . حل المتراجحة $e^{1+x^2} \leq e^{2x}$ في $\mathbb{R}$.

لدينا $e^{1+x^2} \leq e^{2x}$ يعني $1 + x^2 \leq 2x$ أي $x^2 - 2x + 1 \leq 0$ أي $(x - 1)^2 \leq 0$

إذن $x = 1$.

إذن المتراجحة $e^{1+x^2} \leq e^{2x}$ تقبل حلا واحدا في $\mathbb{R}$ هو 1.

3 . حل المتراجحة $e^{x^2} e^x < (e^2)^3$ في $\mathbb{R}$.

لدينا $e^{x^2} e^x < (e^2)^3$ يعني $e^{x^2+x} < e^6$ أي $x^2 + x < 6$ أي $x^2 + x - 6 < 0$.

لدينا $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$

إذن $x^2 + x - 6 < 0$ يعني $(x - 2)(x + 3) < 0$

و بالتالي $x \in]-3 ; 2[$

ينتج أن مجموعة حلول المتراجحة $e^{x^2} e^x < (e^2)^3$ هي $]-3 ; 2[$.

تمارين و حلول نموذجية

مسألة

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x - 2 - e^{-x}$

$(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

2. استنتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $+\infty$.

حدد الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (Δ).

3. اثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f(x) = e^{-x}(xe^{x} - 1) - 2$

استنتج $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

ادرس سلوك المنحنى $(\mathscr{C})$ الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$.

4. ادرس تغيرات الدالة f .

5. اثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $2 < x_0 < 3$.

6. ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$.

7. احسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (Δ)

و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 3$ و $x = \lambda$ ؛ $\lambda > 3$.

ما هي نهاية $A(\lambda)$ لما يؤول λ إلى $+\infty$ ؟

حل

1. حساب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$. لدينا $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} (x - 2) = +\infty$. إذن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2. استنتاج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا (Δ).

لدينا $f(x) = ax + b + \phi(x)$ حيث $a = 1$ ، $b = -2$ و $\phi(x) = e^{-x}$.

بما أن $\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = 0$ فإن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 2$ هو المستقيم المقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

3. من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $e^{-x}(xe^{x} - 1) - 2 = xe^{-x} e^{x} - e^{-x} - 2$

$$= x - 2 - e^{-x} = f(x)$$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f(x) = e^{-x}(xe^{-x} - 1) - 2$

لدينا $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} xe^{-x} = -\infty$ إذن $\lim_{x \to -\infty} e^{-x}(xe^{-x} - 1) - 2 = -\infty$

ينتج أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C})$.

لدينا $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{e^{-x}}{x}\right)$ و $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = -\infty$

إذن $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

ينتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرع قطع مكافئ بجوار $-\infty$.

4. دراسة تغيرات الدالة f.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = 1 + e^{-x}$.

من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $e^{-x} > 0$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) > 0$.

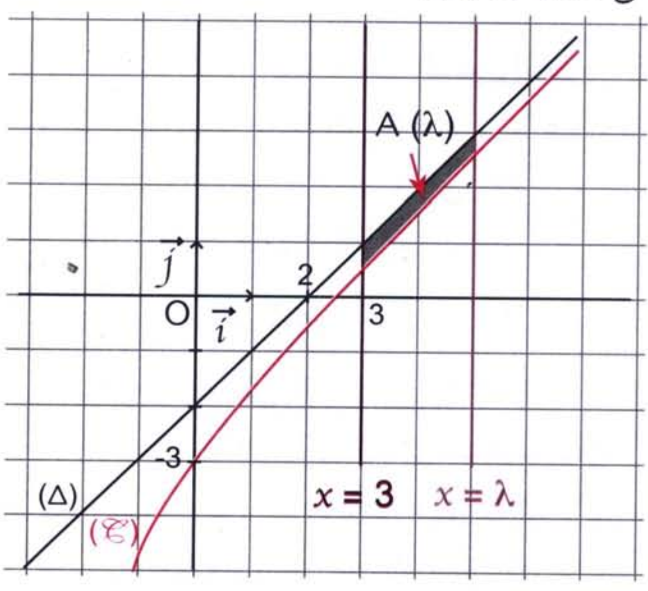
ينتج أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

5. إثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $2 < x_0 < 3$.

الدالة f معرفة و مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[2 ; 3]$.



لدينا $f(2) = -\frac{1}{e^2}$ ؛ أي $f(2) < 0$

و $f(3) = 1 - \frac{1}{e^3}$ ؛ أي $f(3) > 0$

و بالتالي $f(2).f(3) < 0$

إذن المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $2 < x_0 < 3$.

6. رسم المنحنى $(\mathscr{C})$.

7. حساب المساحة $A(\lambda)$.

لدينا $A(\lambda) = \int_3^{\lambda} [(x-2) - f(x)]\, dx$

$= \int_3^{\lambda} e^{-x}\, dx$

الدالة $x \longmapsto -e^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto e^{-x}$ على المجال $[3 ; \lambda]$ حيث $\lambda > 3$.

ينتج أن $A(\lambda) = [-e^{-x}]_3^{\lambda}$

$= -e^{-\lambda} + e^{-3}$

و بالتالي $A(\lambda) = -e^{-\lambda} + \frac{1}{e^3}$ (وحدة المساحات).

• حساب نهاية $A(\lambda)$ لما تؤول λ إلى $+\infty$.

لدينا $\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} \left(-e^{-\lambda} + \frac{1}{e^3}\right) = \frac{1}{e^3}$ لأن $\lim_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda} = 0$

و بالتالي $\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \frac{1}{e^3}$.

إستعمال الترميز e^x

1 بسط العبارت التالية :

$(e^{3x})^2$ ؛ $e^{1-x}e^{3x+3}$ ؛ $e^x e^{-2x}$ ؛ $e^{2x}e^{3x}$

$\frac{e^{-0,2}}{e^{0,2}}$ ؛ $\frac{e^5}{e^2}$ ؛ $e^{\frac{1}{2}}e^{-2}$ ؛ $(e^x)^{-2}$

2 عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $\frac{e^x+1}{2e^x+1} = a + \frac{be^x}{2e^x+1}$

3 عين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x، $\frac{e^{2x}}{e^x+4} = ae^x + b + \frac{ce^x}{e^x+4}$

حساب نهايات

4 عين النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-e^x)$ ؛ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} x e^{\frac{1}{x}}$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^{2x}-1}$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x+1}$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x+1}$

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$ ؛ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{1+e^x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^2+x-5)e^x$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}(2xe+3-5e^x)$

تعيين دوال مشتقة

5 في كل حالة من الحالات التالية، عين مجموعة تعريف الدالة f و دالتها المشتقة f'.

$f(x) = e^{3x+1}$ ؛ $f(x) = 2e^x$

$f(x) = e^{\sin 2x}$ ؛ $f(x) = e^{3-x}$

$f(x) = (3x+1)e^x$ ؛ $f(x) = \sqrt{e^x}$

$f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ ؛ $f(x) = (x^2-2x)e^{-x}$

$f(x) = e^x \sin x$ ؛ $f(x) = \frac{5e^x-1}{1-e^x}$

$f(x) = e^{-x}(\cos 3x - \sin 3x)$

حل معادلات و متراجحات

6 حل في $\mathbb{R}$ كلا من المعادلات التالية :

$e^{5x-1} = e^{x^2+5}$ ؛ $e^{x^2} = e^{25}$ ؛ $e^x = 1$

$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = 1$ ؛ $e^x + 1 = \frac{2}{e^x}$ ؛ $e^{\sin x} = e^{\cos x}$

$e^x + e^{-x} = 2$ ؛ $e^{4x} - e^{2x} = 0$

$e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$ ؛ $e^{2x} + 2e^{-x} - 3 = 0$

7 حل في $\mathbb{R}$ كلا من المتراجحات التالية :

$e^{2x} - e^x < 0$ ؛ $e^{x^2-2} \leq e^{4-x}$ ؛ $e^x \geq \sqrt{e}$

$e^{4x} + 5e^{2x} - 6 \leq 0$ ؛ $e^{2x} + 2e^x - 3 \geq 0$

$e^{2x} > e^{x+1}$ ؛ $e^{x^2}\times e^x < (e^3)^2$

حساب دوال أصلية

8 في كل حالة من الحالات التالية، عيّن دالة أصلية للدالة f على المجال I.

$I = \mathbb{R}$ ؛ $f(x) = e^{-x}$

$I = \mathbb{R}$ ؛ $f(x) = \frac{1}{2}e^{3x} - 5e^{2x}$

$I = [0\,;+\infty[$ ؛ $f(x) = xe^{x^2}$

$I = \mathbb{R}$ ؛ $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

$I = \mathbb{R}$ ؛ $f(x) = \frac{-e^x}{(e^x+3)^2}$

9 عين العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$F(x) = (a\sin x + b\cos x)e^x$

دالة أصلية للدالة f

حيث $f(x) = (5\sin x - \cos x)e^x$

مسائل

10 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x) = e^x - e^{-x}$

1 • حل المعادلة $f(x) = 0$ في $\mathbb{R}$.

2 • عيّن النهايتين التاليتين :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3 • ادرس تغيرات الدالة f.

4 • ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

5 • حل بيانيا المعادلة $f(x) = k$ حيث k عدد حقيقي.

6 . λ عدد حقيقي موجب تماما.
أحسب المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 0$ و $x = \lambda$. حيث $\lambda > 0$.
احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} A(\lambda)$.

11 نعتبر الدالة f المعرفة بـ :

$$f(x) = 2e^{2x} + e^{x} - 3$$

ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1 . تحقق من صحة المعلومات الواردة في الجدول التالي :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)$	-3 ⟶ 0 ⟶ $+\infty$

(نظم المعلومات المقدمة وفق ترتيب منطقي).

2 . عيّن معادلة للمماس (T) للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة 0.

3 . ادرس إشارة العبارة $f(x) - 5x$ على $\mathbb{R}$.
استنتج الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المماس (T).

12 نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$
و $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1 . عيّن مجموعة تعريف الدالة f .

2 . احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3 . بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛
$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$. احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

4 . أثبت أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

5 . بيّن أن النقطة $A\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر $(\mathscr{C})$.

6 . عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ عند النقطة A.

7 . نعتبر الدالة g المعرفة كما يلي :

$$g(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} - f(x)$$

أ) . حلل العبارة $e^{2x} - 2e^{x} + 1$

ب) . احسب $g'(x)$ و $g(0)$. ادرس تغيرات g.

ج) . استنتج الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المماس (T).

8 . ارسم (T) و $(\mathscr{C})$.

13 (I_n) متتالية معرفة كما يلي :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \, dx$$

1 . احسب I_1.

2 . برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n + 1) I_n$$

3 . احسب I_2 و I_3.

14 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :
$f(x) = xe^{-x}$ و λ عدد حقيقي موجب تماما.

1 . ادرس تغيرات الدالة f .

2 . ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. الوحدة 4 cm.

3 . باستعمال المكاملة بالتجربة، احسب المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 0$ و $x = \lambda$ على الترتيب.
ادرس نهاية $A(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$.

15 1 . نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$
كما يلي : $g(x) = e^{x} - x - 1$

- ادرس تغيرات الدالة g .
- احسب $g(0)$.

2 . استنتج أن العبارة $\frac{e^x}{e^x - x}$ موجبة من أجل كل عدد حقيقي x.

3. نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$$

- تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f(x) > 0$

- احسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

4. بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$$f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}$$

استنتج $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

5. ادرس تغيرات الدالة f.

6. $(\mathscr{C})$ هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

- ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C})$.

- ارسم $(\mathscr{C})$ في المعلم السابق.

16 نعتبر الدالة العددية f المعرفة

بـ : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

الوحدة 1 cm.

1. عين مجموعة تعريف الدالة f.

2. ادرس تغيرات الدالة f.

3. بيّن أن $f(x)$ يكتب على الشكل

$f(x) = a + \frac{b}{e^x + 1}$ حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

4. بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي x

$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ و استنتج أن الدالة f فردية.

5. أثبت أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف.

6. عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ عند النقطة التي فاصلتها 0.

7. ادرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المماس (T).

8. ارسم المماس (T) و المنحنى $(\mathscr{C})$.

17 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. الوحدة 1 cm.

لتكن f الدالة المعرفة بـ : $f(x) = (2 + \cos x)\, e^{1-x}$

و $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لها في المعلم السابق.

1. عين مجموعة تعريف f.

2. بين أن من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) > 0$

3. بين أن من أجل كل عدد حقيقي x

$$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$$

استنتج أن من أجل كل عدد حقيقي x

$$2 + \cos x + \sin x > 0$$

4. بين أن من أجل كل عدد حقيقي x

$$e^{1-x} \leq f(x) \leq 3\, e^{1-x}$$

استنتج نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$.

5. أثبت أن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

أنجز جدول تغيرات الدالة f.

6. ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C})$.

7. بيّن أن المعادلة $f(x) = 3$ تقبل حلا واحدا α حيث $0 < \alpha < \pi$.

8. ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$.

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي

و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.



Hard_equation

5 - الدوال اللوغاريتمية

معـــارف

I - الدالة «لوغاريتم نيبري»

1 . مبرهنة و تعريف

• من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما، المعادلة $e^t = x$ تقبل حلا وحيدا t يرمز له $\ln x$.
العدد الحقيقي $\ln x$ يقرأ اللوغاريتم النيبري لـ x.

• الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي موجب تماما x العدد $\ln x$ تسمى الدالة «لوغاريتم نيبري» ويرمز لها بـ $\ln$.

ملاحظات :

1 . الدالة $\ln : x \longmapsto \ln x$ معرفة على المجال $]0\,;+\infty[$ و تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$.

2 . المعادلة $e^t = x$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$ ؛ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x (لأن الدالة الأسية $x \longmapsto e^x$ معرفة، مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$).

3 . حل المعادلة $e^x = y_0$، حيث y_0 عدد حقيقي موجب تماما هو العدد الحقيقي x فاصلة النقطة من المنحني الممثل للدالة $x \longmapsto e^x$، ذات الترتيب y_0.
نكتب : $x = \ln y_0$.

4 . من أجل كل عدد حقيقي y موجب تماما، من أجل كل عدد حقيقي x
$e^x = y$ يكافئ $x = \ln y$.

5 . $e^0 = 1$ يعني $\ln 1 = 0$ ؛ $e^1 = e$ يعني $\ln e = 1$

6 . التمثيل الموالي يسمح بالقول أن الدالة $\ln : x \longmapsto \ln x$ هي الدالة العكسية للدالة $\exp : x \longmapsto e^x$.

$$]-\infty\,;+\infty[\xrightarrow{\exp}]0\,;+\infty[\quad (\ln \text{ : retour})$$

7 . من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما، $e^{\ln x} = x$.
من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $\ln e^x = x$.

2 . مبرهنة

الدالة «لوغاريتم النيبري» $\ln$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0\,;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما، $\ln' x = \frac{1}{x}$.

3. خواص

من أجل كل عددين حقيقيين x و y موجبين تماما و من أجل كل عدد ناطق n،

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \qquad \ln(x^n) = n\ln x$$

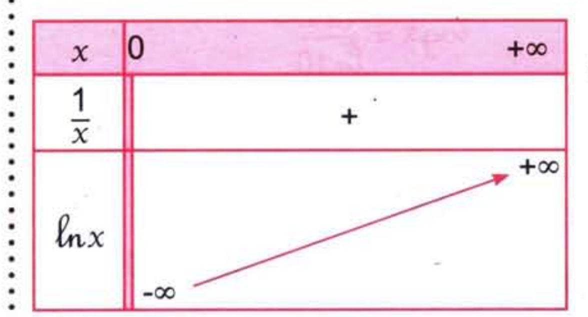
حالة خاصة : من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما، $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$.

4. دراسة الدالة «اللوغاريتم النيبري»

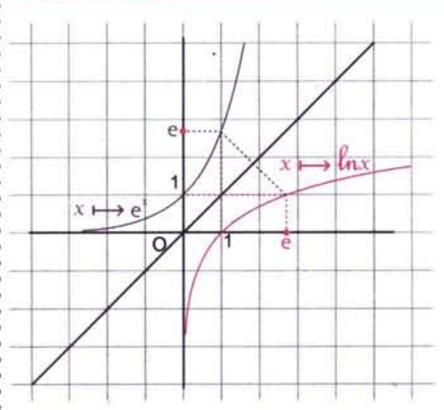
- الدالة $\ln$ معرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ و تأخذ قيمها في المجال $]-\infty ; +\infty[$.
- $\lim\limits_{x \to 0^{>}} \ln x = -\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- الدالة $\ln$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0 ; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x ؛ $\ln' x = \frac{1}{x}$.

- الدالة $\ln$ مستمرة على المجال $]0 ; +\infty[$ (لأنها قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$).
- الدالة $\ln$ متزايدة تماما على المجال $]0 ; +\infty[$.
- مما سبق يكون جدول تغيرات الدالة $\ln$ كما يلي :



x	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	+	
$\ln x$	$-\infty$ ↗	$+\infty$



- المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (أي محور التراتيب) هو مستقيم مقارب للمنحني الممثل للدالة $\ln$.
- المنحنى الممثل للدالة $\ln$ يقبل فرع قطع مكافئ بجوار $+\infty$.
- في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ المنحنيان الممثلان للدالتين exp و $\ln$ متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y = x$.

5. نتيجتان

من أجل كل عددين حقيقيين a و b موجبين تماما،

$\ln a = \ln b$ إذا و فقط إذا كان $a = b$.

$\ln a < \ln b$ إذا و فقط إذا كان $a < b$.

تستعمل هاتان النتيجتان لحل معادلات و متراجحات.

6 . اشتقاق الدالة $x \longmapsto \ln|u(x)|$

مبرهنة

u دالة معرفة على مجال I.

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I و لا تنعدم على I فإن الدالة $x \longmapsto \ln|u(x)|$ قابلة للاشتقاق على I و من أجل كل عدد حقيقي x من I، $(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

7 . نهايات شهيرة

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln x = 0$$

II - دوال لوغاريتم و دوال أسية أخرى

1 . الدالة «اللوغاريتم العشري»

تعريف

الدالة «اللوغاريتم العشري» يرمز لها $\log$ هي الدالة المعرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ كما يلي :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

ملاحظات

1 . $\log 1 = 0$; $\log 10 = 1$; $\ln 10 \approx 2,30$

2 . الدالة $\log$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0 ; +\infty[$

و دالتها المشتقة معرفة على $]0 ; +\infty[$ كما يلي : $(\log x)' = \frac{1}{x \ln 10}$

3 . الدالة $\log$ لها نفس تغيرات الدالة $\ln$ على المجال $]0 ; +\infty[$.

خواص

من أجل كل عددين حقيقيين x و y موجبين تماما و من أجل كل عدد ناطق n،

$$\log(xy) = \log x + \log y \quad | \quad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

$$\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x \quad | \quad \log(x^n) = n \log x$$

نتيجة : من أجل كل عددين حقيقيين a و b موجبين تماما ،

$\log a = \log b$ يكافئ $a = b$.

$\log a < \log b$ يكافئ $a < b$.

2. الدوال الأسية ذات الأساس a

تعريف

a عدد حقيقي موجب تماما حيث $a \neq 1$.

نسمي الدالة الأسية ذات الأساس a، يرمز لها $\exp_a$، الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $\exp_a(x) = a^x$.

ملاحظة

من أجل كل عدد حقيقي x و من أجل كل عدد حقيقي a موجب تماما حيث $a \neq 1$ ، $a^x = e^{x \ell n a}$.

خواص

من أجل كل عددين حقيقيين a و b موجبين تماما حيث $a \neq 1$ و $b \neq 1$

و من أجل كل عددين حقيقيين x و y ،

$$a^{x+y} = a^x a^y \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \qquad (ab)^x = a^x b^x$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad (a^x)^y = a^{xy} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^y}$$

3. تغيرات الدالة $\exp_a$

1. إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ ؛ $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$

إذا كان $a > 1$ فإن $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ ؛ $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

2. الدالة $\exp_a$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

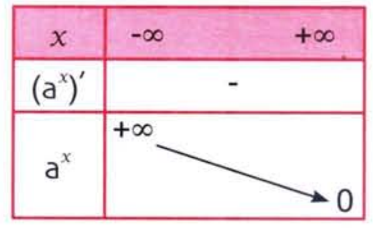
و من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $\exp'_a(x) = (\ell n a)\, a^x$

3. إذا كان $0 < a < 1$ فإن الدالة $\exp_a$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

إذا كان $a > 1$ فإن الدالة $\exp_a$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

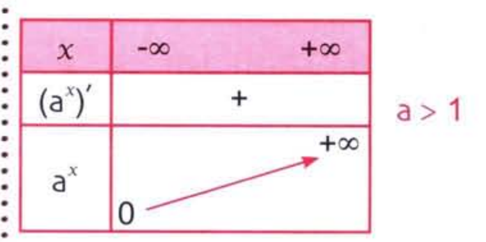
4. جدول التغيرات

$0 < a < 1$



x	$-\infty$	$+\infty$
$(a^x)'$	-	
a^x	$+\infty$ ↘	0

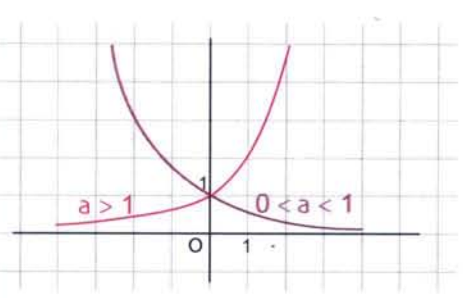
$a > 1$



x	$-\infty$	$+\infty$
$(a^x)'$	+	
a^x	0 ↗	$+\infty$

5. عندما a يمسح $\mathbb{R}_+^*$ و $a \neq 1$ كل منحنيات الدالة $\exp_a$ تشمل النقطة ذات الإحداثيين $(0 ; 1)$.

- محور الفواصل هو مستقيم مقارب أفقي لهذه المنحنيات.
- كل هذه المنحنيات تقبل فرع قطع مكافئ منحاه هو منحى محور التراتيب.



III - الدالة «جذر نوني»

تعريف

n عدد طبيعي أكبر تماما من 1.

نسمي الدالة «جذر نوني» و نرمز لها بـ $\sqrt[n]{\ }$ ، الدالة المعرفة على المجال $[0 ; +\infty[$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x موجب ، العدد الموجب $\sqrt[n]{x}$ حيث $x = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n$.

نتيجة

1 • من أجل كل عدد حقيقي موجب x ؛ $A = \sqrt[n]{x}$ يكافئ $A^n = x$.

2 • من أجل كل عدد حقيقي موجب x ؛ $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

3 • من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ؛ $\sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n}\ln x}$.

4 • $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \sqrt[n]{x} = 0$.

IV - التزايدات المقارنة

نعلم أن $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ حيث n عدد طبيعي غير منعدم .

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

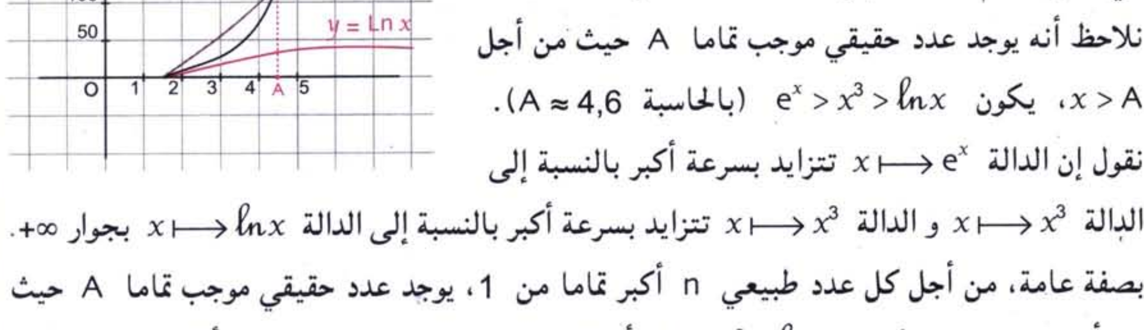
مبرهنة

n عدد طبيعي غير منعدم. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

نتيجة

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x^n \ln x = 0$ ؛ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

التفسير البياني للتزايدات المقارنة



نرسم المنحنيات الممثلة للدوال

$x \longmapsto x^3$ ؛ $x \longmapsto \ln x$ ؛ $x \longmapsto e^x$

في نفس المعلم المتعامد $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ،(الشكل).

نلاحظ أنه يوجد عدد حقيقي موجب تماما A حيث من أجل $x > A$ ، يكون $e^x > x^3 > \ln x$ (بالحاسبة $A \approx 4{,}6$).

نقول إن الدالة $x \longmapsto e^x$ تتزايد بسرعة أكبر بالنسبة إلى الدالة $x \longmapsto x^3$ و الدالة $x \longmapsto x^3$ تتزايد بسرعة أكبر بالنسبة إلى الدالة $x \longmapsto \ln x$ بجوار $+\infty$.

بصفة عامة، من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 ، يوجد عدد حقيقي موجب تماما A حيث من أجل $x > A$ ، يكون $e^x > x^3 > \ln x$. أي الدالة $x \longmapsto e^x$ تتزايد بسرعة أكبر بالنسبة إلى الدالة $x \longmapsto x^n$ و الدالة $x \longmapsto x^n$ تتزايد بسرعة اكبر بالنسبة إلى الدالة $x \longmapsto \ln x$ بجوار $+\infty$.

طرائق

1 استعمال خواص الدالة $\ln$

تمرين

اكتب على أبسط شكل الأعداد التالية :

$\ln 32$ ؛ $\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 8 + 4\ln\sqrt{2}$ ؛ $\ln 72 - 2\ln\frac{27}{256} + \ln\sqrt{108}$

$\ln\frac{1}{8} - \ln 0,375 + 2\ln\sqrt{0,5625}$

حل

1 • لدينا $\ln 32 = \ln 2^5 = 5\ln 2$ إذن $\ln 32 = 5\ln 2$

2 • لدينا $\ln\frac{1}{2} = -\ln 2$ ؛ $\ln 8 = \ln 2^3 = 3\ln 2$ ؛ $\ln\sqrt{2} = \ln 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln 2$

إذن
$$\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 8 + 4\ln\sqrt{2} = -\ln 2 + \frac{1}{2}\times 3\ln 2 + 4\times\frac{1}{2}\ln 2$$
$$= -\ln 2 + \frac{3}{2}\ln 2 + 2\ln 2$$
$$= \left(-1 + \frac{3}{2} + 2\right)\ln 2 = \frac{5}{2}\ln 2$$

ينتج أن $\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 8 + 4\ln\sqrt{2} = \frac{5}{2}\ln 2$

3 • لدينا
$$\ln 72 = \ln(9\times 8) = \ln 9 + \ln 8$$
$$= 2\ln 3 + 3\ln 2$$

$$\ln\frac{27}{256} = \ln 27 - \ln 256 = \ln 3^3 - \ln 2^8$$
$$= 3\ln 3 - 8\ln 2$$

$$\ln\sqrt{108} = \frac{1}{2}\ln 108 = \frac{1}{2}\ln 4\times 27$$
$$= \frac{1}{2}\ln 4 + \frac{1}{2}\ln 27 = \ln 2 + \frac{3}{2}\ln 3$$

إذن
$$\ln 72 - 2\ln\frac{27}{256} + \ln\sqrt{108} = 2\ln 3 + 3\ln 2 - 2(3\ln 3 - 8\ln 2) + \ln 2 + \frac{3}{2}\ln 3$$
$$= 2\ln 3 + 3\ln 2 - 6\ln 3 + 16\ln 2 + \ln 2 + \frac{3}{2}\ln 3$$
$$= \left(2 - 6 + \frac{3}{2}\right)\ln 3 + (3 + 16 + 1)\ln 2 = -\frac{5}{2}\ln 3 + 20\ln 2$$

إذن $\ln 72 - 2\ln\frac{27}{256} + \ln\sqrt{108} = -\frac{5}{2}\ln 3 + 20\ln 2$

4 • لدينا $\ln \frac{1}{8} = -\ln 8 = -3\ln 2$

$$\ln 0{,}375 = \ln \frac{375}{1000} = \ln \frac{3}{8} = \ln 3 - \ln 8 = \ln 3 - 3\ln 2$$

$$2\ln \sqrt{0{,}5625} = \ln 0{,}5625 = \ln \frac{5625}{10000} = \ln \frac{5}{16} = \ln 9 - \ln 16 = 2\ln 3 - 4\ln 2$$

إذن $\ln \frac{1}{8} - \ln 0{,}375 + 2\ln \sqrt{0{,}5625} = -3\ln 2 - \ln 3 + 3\ln 2 + 2\ln 3 - 4\ln 2$

$$= -4\ln 2 + \ln 3$$

و بالتالي $\ln \frac{1}{8} - \ln 0{,}375 + 2\ln \sqrt{0{,}5625} = -4\ln 2 + \ln 3$

2 حل معادلات و متراجحات

تمرين 1

حل في $\mathbb{R}$ كل معادلة من المعادلات التالية

$\ln x = 2$ ؛ $\ln(x-1) = 2\ln 3 - 3\ln 2$ ؛ $\ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3)$

$\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7)$

حل

1 • حل المعادلة $\ln x = 2$

$\ln x$ معرف إذا كان $x > 0$.

إذن $\ln x = 2$ يعني $x > 0$ و $\ln x = \ln e^2$ و بالتالي $x = e^2$

ينتج أن المعادلة $\ln x = 2$ تقبل حلا واحدا في $\mathbb{R}$ هو e^2.

طريقة أخرى : نعلم أن من أجل $x > 0$ و y عدد حقيقي، $y = \ln x$ يكافئ $x = e^y$

لدينا $\ln x = 2$ إذن $x = e^2$.

2 • حل المعادلة $\ln(x-1) = 2\ln 3 - 3\ln 2$

$\ln(x-1)$ معرف إذا كان $x - 1 > 0$ أي $x > 1$.

إذن $\ln(x-1) = 2\ln 3 - 3\ln 2$ يعني $x > 1$ و $\ln(x-1) = \ln 3^2 - \ln 2^3$

أي $x > 1$ و $\ln(x-1) = \ln \frac{9}{8}$

و بالتالي $x - 1 = \frac{9}{8}$ أي $x = \frac{17}{8}$

ينتج أن المعادلة $\ln(x-1) = 2\ln 3 - 3\ln 2$ تقبل حلا واحدا و هو $\frac{17}{8}$.

3 • حل المعادلة $\ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3)$

لحل هذه المعادلة نضع الشرط التالي $0 < x$ و $0 < 3x+2$ و $0 < 2x+3$ أي $0 < x$.

لدينا $\ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3)$ يعني $0 < x$ و $\ln x(3x+2) = \ln(2x+3)$

إذن $0 < x$ و $x(3x+2) = 2x+3$

أي $0 < x$ و $3x^2 + 2x = 2x + 3$

أي $0 < x$ و $3x^2 - 3 = 0$

إذن $0 < x$ و ($x = 1$ أو $x = -1$) . ينتج أن $x = 1$.

و بالتالي المعادلة $\ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3)$ تقبل حلا واحدا هو 1.

4 • حل المعادلة $\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7)$

لحل هذه المعادلة نضع الشرط التالي $0 < x^2 - 2x - 3$ و $0 < x + 7$.

لدينا $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$

إذن $0 < x^2 - 2x - 3$ إذا و فقط إذا كان $x \in]-\infty ; -1[\cup]3 ; +\infty[$.

و $0 < x + 7$ إذا و فقط إذا كان $x > -7$.

ينتج أن $x \in]-7 ; -1[\cup]3 ; +\infty[$.

حل المعادلة $\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7)$ في المجموعة $]-7 ; -1[\cup]3 ; +\infty[$.

لدينا $\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7)$ إذا و فقط إذا كان $x \in]-7 ; -1[\cup]3 ; +\infty[$

و $x^2 - 2x - 3 = x + 7$ أي $x \in]-7 ; -1[\cup]3 ; +\infty[$ و $x^2 - 3x - 10 = 0$.

حل المعادلة $x^2 - 3x - 10 = 0$ في المجموعة $]-7 ; -1[\cup]3 ; +\infty[$.

$\Delta = 49$ ؛ $\Delta > 0$ إذن المعادلة تقبل حلين مختلفين هما $x_1 = 5$ و $x_2 = -2$.

لدينا 5 و -2 ينتميان إلى المجموعة $]-7 ; -1[\cup]3 ; +\infty[$.

و بالتالي المعادلة $\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7)$ تقبل حلين مختلفين هما 5 و -2.

تمرين 2

حل كل متراجحة من المتراجحات التالية

$\ln(x-1) \geq 0$ ؛ $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$ ؛ $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$

. $\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$

حل

1 • حل المتراجحة $\ln(x-1) \geq 0$.

لحل المتراجحة $\ln(x-1) \geq 0$ نضع الشرط التالي $x - 1 > 0$ أي $x > 1$.

حل المتراجحة $\ln(x-1) \geq 0$ في المجال $]1 ; +\infty[$.

لدينا $\ln(x-1) \geq 0$ يعني $x > 1$ و $\ln(x-1) \geq \ln 1$

أي $x > 1$ و $x - 1 \geq 1$ أي $x > 1$ و $x \geq 2$ إذن $x \geq 2$.

و بالتالي مجموعة حلول المتراجحة $\ln(x-1) \geq 0$ هي $[2 ; +\infty[$.

2 • حل المتراجحة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$.

لحل المتراجحة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$ نضع الشرط التالي $x \neq -1$ و $\frac{x-1}{x+1} > 0$.

أي $x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$.

حل في المجموعة $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ المتراجحة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$.

لدينا $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$ يعني $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > \ln 1$ أي $\frac{x-1}{x+1} > 1$.

أي $\frac{x-1}{x+1} - 1 > 0$ أي $\frac{-2}{x+1} > 0$ أي $\frac{2}{x+1} < 0$.

إذن $x + 1 < 0$ و بالتالي $x < -1$.

ينتج أن مجموعة حلول المتراجحة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$ هي $]-\infty ; -1[$.

3 • حل المتراجحة $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$.

لحل المتراجحة $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$ نضع الشرط التالي $x + 1 > 0$ و $3 - x > 0$.

أي $x > -1$ و $x < 3$ أي $x \in]-1 ; 3[$.

حل المتراجحة $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$ في المجال $]-1 ; 3[$.

لدينا $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$ يعني $\ln(x+1)(3-x) < \ln 1$

إذن $(x+1)(3-x) < 1$ و بالتالي $x^2 - 2x - 2 > 0$

أي $(x - 1 + \sqrt{3})(x - 1 - \sqrt{3}) > 0$

إذن $x \in]-\infty ; 1 - \sqrt{3}[\cup]1 + \sqrt{3} ; +\infty[$ و $x \in]-1 ; 3[$ إذن $x \in]-1 ; 1 - \sqrt{3}[\cup]1 + \sqrt{3} ; 3[$

ينتج أن مجموعة حلول المتراجحة $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$ هي $]-1 ; 1 - \sqrt{3}[\cup]1 + \sqrt{3} ; 3[$.

4 • حل المتراجحة $\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$.

لحل المتراجحة $\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$ نضع الشرط التالي $x^2 - 1 > 0$ و $4x - 1 > 0$.

أي $x \in]1 ; +\infty[$.

حل المتراجحة $\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$ في المجال $]1 ; +\infty[$.

لدينا $\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$ إذا و فقط إذا كان $x^2 - 1 \geq 4x - 1$ أي $x^2 - 4x \geq 0$

إذن $x(x - 4) > 0$.

و بالتالي $x \geq 4$ أي $x \in [4 ; +\infty[$.

ينتج أن مجموعة حلول المتراجحة $\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$ هي $[4 ; +\infty[$.

3 حساب نهايات

تمرين

احسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - \ln x)$ ؛ $\lim\limits_{x \to 1} \ln\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + (\ln x)^2\right)$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(x^2 + (\ln x)^2\right)$ ؛ $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

حل

1 • حساب النهاية $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - \ln x)$

الدالة $x \longmapsto 2x - \ln x$ معرفة على المجال $]0 ; +\infty[$.

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - \ln x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(2 - \frac{\ln x}{x}\right)$

بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{\ln x}{x}\right) = 2$

نعلم أن $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(2 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

ينتج أن $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - \ln x) = +\infty$.

2 • حساب النهاية $\lim\limits_{x \to 1} \ln\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)$

الدالة $x \longmapsto \ln\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)$ معرفة على المجال $]-1 ; 1[$.

لدينا $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{1 - x}{1 + x} = 0$ و $\frac{1 - x}{1 + x} > 0$ على المجال $]-1 ; 1[$.

إذن $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \ln\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) = -\infty$

3 • حساب النهاية $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + (\ln x)^2\right)$.

الدالة $x \longmapsto x^2 + (\ln x)^2$ معرفة على المجال $]0 ; +\infty[$.

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^2 = +\infty$

و نعلم أن $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ ينتج أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + (\ln x)^2\right) = +\infty$.

4 • حساب النهاية $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(x^2 + (\ln x)^2\right)$.

لدينا $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ و نعلم أن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$

إذن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (\ln x)^2 = +\infty$ ينتج أن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(x^2 + (\ln x)^2\right) = +\infty$.

5 • حساب النهاية $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

الدالة $x \longmapsto x \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right)$ معرفة على المجال $]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[$.

لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

إذن توجد حالة عدم التعيين.

نضع $y = \frac{1}{x}$. عندما $x \longrightarrow -\infty$ ؛ $y \longrightarrow 0$.

لدينا $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1 + y)}{y}$

ينتج أن $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} = 1$

و بالتالي $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 1$.

6 • حساب النهاية $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

بوضع $y = \frac{1}{x}$ لدينا $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1 + y)}{y}$

و عندما $x \longrightarrow +\infty$ ؛ $y \longrightarrow 0$.

إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} = 1$

و بالتالي $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$.

4 تعيين دوال مشتقة

تمرين 1

f دالة معرفة على المجال $[0 ; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x^2(-1 + 2\ln x)$ إذا كان $x > 0$
و $f(0) = 0$.

1 • هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 0 عن اليمين ؟

2 • عين الدالة المشتقة f' للدالة f.

حل

1 • الدالة f معرفة على المجال $[0 ; +\infty[$.

لدينا $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x^2(-1 + 2\ln x)}{x}$

من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ؛ $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x(-1 + 2\ln x)$

لدينا $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x(-1 + 2\ln x)$

$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (-x + 2x\ln x) = 0$

و بالتالي $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

ينتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 0 عن اليمين و $f'(0) = 0$.

2 • الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0 ; +\infty[$ (f قابلة للاشتقاق على المجال $]0 ; +\infty[$ و قابلة للاشتقاق عند العدد 0 عن اليمين).

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x ؛ $f'(x) = 2x(-1 + 2\ln x) + x^2\left(\dfrac{2}{x}\right)$

$= -2x + 4x\ln x + 2x$

$= 4x\ln x$

أي من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x ؛ $f'(x) = 4x\ln x$ و $f'(0) = 0$.

إذن الدالة f' معرفة كما يلي : $f'(x) = 4x\ln x$ إذا كان $x > 0$ و $f'(0) = 0$.

تمرين 2

f هي الدالة المعرفة كما يلي : $f(x) = e^{-x}\ln(1 + e^{2x})$.

1 • عين مجموعة تعريف الدالة f .

2 • ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على مجموعة تعريفها.

3 • عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حل

1 • من أجل كل عدد حقيقي x ، $1 + e^{2x} > 0$. إذن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

2 • الدالة $x \longmapsto e^{-x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و الدالة $x \longmapsto \ln(1 + e^{2x})$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. (اشتقاق دالة مركبة)

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. (اشتقاق جداء دالتين).

3 • تعيين الدالة المشتقة f' للدالة f.

من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$$f'(x) = -e^{-x}\ln(1 + e^{2x}) + e^{-x}\left(\frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}\right)$$

$$= -e^{-x}\ln(1 + e^{2x}) + \frac{2e^{x}}{1 + e^{2x}}$$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$$f'(x) = -e^{-x}\ln(1 + e^{2x}) + \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}$$

تمرين 3

f هي الدالة المعرفة كما يلي : $f(x) = \ln\left(\frac{2 - x}{2 + x}\right)$

1 • عين مجموعة تعريف الدالة f .

2 • عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حل

1 • الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $2 + x \neq 0$ و $\frac{2 - x}{2 + x} > 0$ أي $x \in]-2 ; 2[$.

و بالتالي مجموعة تعريف الدالة f هي المجال $]-2 ; 2[$.

2 • الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-2 ; 2[$.

و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2 ; 2[$ ؛

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2 - x}{2 + x}\right)'}{\frac{2 - x}{2 + x}}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]-2 ; 2[$ ؛ $\left(\frac{2 - x}{2 + x}\right)' = \frac{-4}{(2 + x)^2}$

بعد التبسيط، ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2 ; 2[$ ؛ $f'(x) = \frac{-4}{4 + x^2}$.

5 حساب دالة أصلية لدالة ناطقة

تمرين

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{-1 ; -\frac{1}{2}\right\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x^2 - x - 2}{2x^2 + 3x + 1}$

1 • عين الأعداد الحقيقية a، b، c حيث من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $-\frac{1}{2}$ و -1 $f(x) = a + \frac{b}{2x+1} + \frac{c}{x+1}$.

2 • استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ حيث $F(0) = -1$.

حل

1 • الدالة f معرفة على المجموعة $\mathbb{R}-\left\{-1 ; -\frac{1}{2}\right\}$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $-\frac{1}{2}$ و -1

$$a + \frac{b}{2x+1} + \frac{c}{x+1} = \frac{a(2x+1)(x+1) + b(x+1) + c(2x+1)}{(2x+1)(x+1)}$$

$$= \frac{2ax^2 + (3a+b+2c)x + a + b + c}{2x^2 + 3x + 1}$$

إذن $f(x) = a + \frac{b}{2x+1} + \frac{c}{x+1}$

يعني $\frac{2ax^2 + (3a+b+2c)x + a + b + c}{2x^2 + 3x + 1} = \frac{2x^2 - x - 2}{2x^2 + 3x + 1}$

ينتج أن $2a = 2$ و $3a + b + 2c = -1$ و $a + b + c = -2$.

باستعمال طريقة التعويض، ينتج أن $a = 1$ و $b = -2$ و $c = -1$.

إذن من أجل كلَ عدد حقيقي x يختلف عن $-\frac{1}{2}$ و -1 ؛ $f(x) = 1 - \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1}$.

2 • تعيين الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ حيث $F(0) = -1$

الدالة $x \longmapsto x$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto 1$ على $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

الدالة $x \longmapsto \ln(2x+1)$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{2}{2x+1}$ على $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

الدالة $x \longmapsto \ln(x+1)$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{1}{x+1}$ على $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

(استعمال المبرهنة حول الدوال الأصلية للدوال من الشكل $\left(x \longmapsto \frac{u'(x)}{u(x)}\right)$

إذن الدوال الأصلية للدالة f على $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ هي الدوال

$x \longmapsto x - \ln(2x+1) - \ln(x+1) + d$ حيث $d \in \mathbb{R}$.

لدينا $F(0) = -1$ أي $0 + d = -1$. ينتج أن $d = -1$.

إذن الدالة الأصلية F للدالة f على $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ حيث $F(0) = -1$

هي الدالة $x \longmapsto x - \ln(2x+1) - \ln(x+1) - 1$.

6 استعمال اللوغاريتم العشري و الدالة الأسية ذات الأساس α

تمرين 1

بسط الأعداد التالية :

$\log 16$ ؛ $\log(0,81 \times 10^{-2} \times 3^{13})$ ؛ $\sqrt[3]{729}$ ؛ $\sqrt[4]{25} \times 125^{\frac{3}{4}}$

حل

• لدينا $\log 16 = \log 2^4 = 4\log 2$

إذن $\log 16 = 4\log 2$.

• لدينا

$$\begin{aligned}\log(0,81 \times 10^{-2} \times 3^{13}) &= \log 0,81 + \log 10^{-2} + \log 3^{13}\\ &= \log \frac{81}{100} - 2 + 13\log 3\\ &= \log 81 - \log 100 + (-2) + 13\log 3\\ &= 4\log 3 - 2 - 2 + 13\log 3\\ &= -4 + 17\log 3\end{aligned}$$

إذن $\log(0,81 \times 10^{-2} \times 3^{13}) = -4 + 17\log 3$.

• لدينا $\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{3^6} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = 3^2 = 9$

• لدينا

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{25} \times 125^{\frac{3}{4}} &= \sqrt[4]{5^2} \times 5^{\frac{9}{4}}\\ &= 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{9}{4}} = 5^{\frac{11}{4}}\end{aligned}$$

إذن $\sqrt[4]{25} \times 125^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{11}{4}}$

تمرين

حل في $\mathbb{R}$ كل معادلة من المعادلات التالية

$\log(3x+4)=0$ ؛ $\log(2x)-\log(x+1)=\log(x-1)$ ؛ $10^{4x}=9$

$10^{x}-2\times10^{-x}=1$

حل

• حل المعادلة $\log(3x+4)=0$ بوضع الشرط $3x+4>0$ ؛ أي $x\in\left]-\frac{4}{3};+\infty\right[$.

$\log(3x+4)=0$ يعني $x\in\left]-\frac{4}{3};+\infty\right[$ و $\log(3x+4)=\log 1$

أي $x\in\left]-\frac{4}{3};+\infty\right[$ و $3x+4=1$. إذن $x=-1$.

و بالتالي المعادلة $\log(3x+4)=0$ تقبل حلا واحدا هو -1 .

• حل المعادلة $\log(2x)-\log(x+1)=\log(x-1)$ بوضع الشرط $2x>0$ و $x+1>0$

و $x-1>0$ أي $x>1$.

$\log(2x)-\log(x+1)=\log(x-1)$ يعني $x>1$ و $\log\left(\frac{2x}{x+1}\right)=\log(x-1)$

ينتج أن $x>1$ و $\frac{2x}{x+1}=x-1$

أي $x>1$ و $x^2-2x-1=0$

$\Delta'=2$. حلا المعادلة $x^2-2x-1=0$ هما $1+\sqrt{2}$ و $1-\sqrt{2}$.

إذن المعادلة $\log(2x)-\log(x+1)=\log(x-1)$ تقبل حلا واحدا هو $1+\sqrt{2}$.

• حل المعادلة $10^{4x}=9$ حيث x عدد حقيقي.

لدينا $10^{4x}=9$ يعني $\log 10^{4x}=\log 9$

أي $4x=\log 9$ إذن $x=\frac{1}{4}\log 9$

و بالتالي المعادلة $10^{4x}=9$ تقبل حلا واحدا في $\mathbb{R}$ هو $\frac{1}{4}\log 9$.

• حل المعادلة $10^{x}-2\times10^{-x}=1$.

لدينا $10^{x}-2\times10^{-x}=1$ يكافئ $10^{x}-2\times\frac{1}{10^{x}}-1=0$

أي $10^{2x}-10^{x}-2=0$ أي $(10^{x})^2-10^{x}-2=0$

بوضع $t=10^{x}$، نحل المعادلة $t^2-t-2=0$ حيث $t>0$. ينتج أن $t=2$.

لدينا $t=2$ و $t=10^{x}$ إذن $10^{x}=2$ و بالتالي $x=\log 2$.

ينتج أن المعادلة $10^{x}-2\times10^{-x}=1$ تقبل حلا واحدا هو $\log 2$.

مسألة

f دالة معرفة كما يلي : $f(x) = -\frac{x}{x+1} + \ln(x+1)$ و $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة 2 cm)

1. عين مجموعة التعريف E للدالة f.

2. أدرس نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى 1- بقيم أكبر.
(يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $\frac{1}{x+1}\varphi(x)$).

3. ادرس تغيرات الدالة f.

4. عين معادلة للمماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات لفاصلة 1.

5. ادرس تغيرات الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x) = f(x) - \left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4} + \ln 2\right)$.
استنتج إشارة $g(x)$ ثمّ الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المماس (T).

6. ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$.

7. بيّن أنه يوجد عددان حقيقيان a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x من E، $\frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$

8. باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب التكامل $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$.

9. احسب المساحة $\mathcal{A}$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيمات ذات المعادلات $y = 0$ ؛ $x = 0$ ؛ $x = 1$. عين قيمة $\mathcal{A}$ بالسنتمترات المربعة.

حل

1. الدالة $x \longmapsto -\frac{x}{x+1}$ معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ و الدالة $x \longmapsto \ln(x+1)$ معرفة من أجل $x > -1$. أي $x \in]-1\,;+\infty[$. إذن مجموعة تعريف الدالة f هي $]-1\,;+\infty[$. أي $E =]-1\,;+\infty[$

2. من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1\,;+\infty[$ ؛ $f(x) = \frac{1}{x+1}[-x + (x+1)\ln(x+1)]$
نعلم أن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x\ln x = 0$. إذن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} (x+1)\ln(x+1) = 0$
و بالتالي $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} [-x + (x+1)\ln(x+1)] = 1$. و لدينا $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{1}{x+1} = +\infty$
بما أن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{1}{x+1} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} [-x + (x+1)\ln(x+1)] = 1$ فإن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = +\infty$

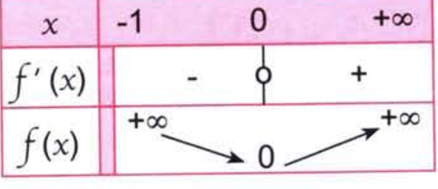
3. لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(-\frac{x}{x+1}\right) = -1$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1\,;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x
$f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$.

إشارة $f'(x)$ على E هي إشارة x على E. ينتج أن الدالة f متناقصة على المجال $]-1 ; 0]$

و متزايدة على المجال $[0 ; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :



x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

• دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C})$.

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = +\infty$ إذن المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ (لأن $\dfrac{f(x)}{x} = -\dfrac{1}{x+1} + \left(\dfrac{x+1}{x}\right)\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$) إذن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرع قطع مكافئ و في اتجاه محور الفواصل بجوار $+\infty$.

4• لدينا $f(1) = -\dfrac{1}{2} + \ln 2$ و $f'(1) = \dfrac{1}{4}$.

إذن معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي $y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{4} + \ln 2$.

5• دراسة تغيرات الدالة g.

الدالة g معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $]-1 ; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x

من $]-1 ; +\infty[$ ؛ $g'(x) = -\dfrac{(x-1)^2}{4(x+1)^2}$

نلاحظ أن $g'(x) = 0$ من أجل $x = 1$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي من $]-1 ; +\infty[$ ؛ $g'(x) \leq 0$.

و بالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-1 ; +\infty[$.

جدول تغيرات g :

x	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$

لدينا $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} g(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ و $g(1) = 0$

من جدول تغيرات الدالة g ينتج أن $g(x) < 0$ على المجال $]1 ; +\infty[$

ينتج أن $(\mathscr{C})$ فوق (T) على المجال $]-1 ; 1[$ ، $(\mathscr{C})$ تحت (T) على المجال $]1 ; +\infty[$

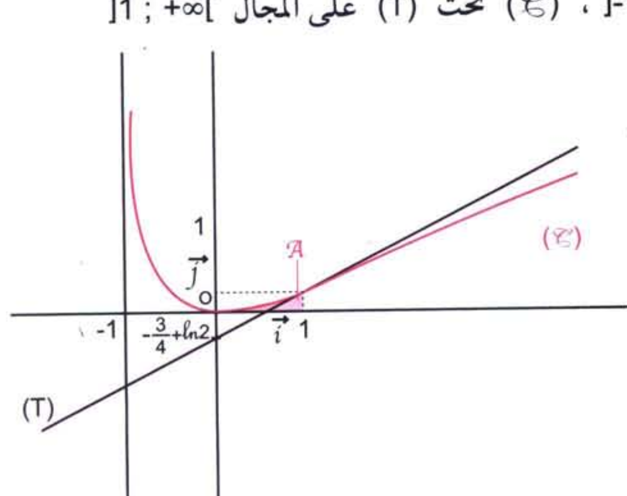
(T) يقطع $(\mathscr{C})$ في النقطة ذات الفاصلة 1.

نلاحظ أن النقطة ذات الفاصلة 1 من $(\mathscr{C})$ هي نقطة إنعطاف $(\mathscr{C})$ (لأن (T) يقطع $(\mathscr{C})$ فيها).

6• رسم المنحنى $(\mathscr{C})$ و المماس (T).

$f(1) = -\dfrac{1}{2} + \ln 2 \approx 0{,}19$

$-\dfrac{3}{4} + \ln 2 \approx 0{,}60$



7. من أجل كل عدد حقيقي x من E ؛ $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ إذن $a = 1$ و $b = -1$

8. حساب التكامل $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$.

نضع $v'(x) = 1$ و $u(x) = \ln(x+1)$. إذن $v(x) = x + 1$ و $u'(x) = \frac{1}{x+1}$

ينتج أن $\int_0^1 \ln(x+1)\,dx = \left[(x+1)\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1}{x+1}\,dx$

$$= \left[(x+1)\ln(x+1) - x\right]_0^1 = 2\ln 2 - 1$$

إذن $\int_0^1 \ln(x+1)\,dx = 2\ln 2 - 1$.

ملاحظة : يمكن إختيار $v(x) = x$ لحساب التكامل السابق.

9. $$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)\,d(x) = \int_0^1 \left[(-1 + \frac{1}{x+1} + \ln(x+1)\right]dx$$

$$= \left[-x + \ln(x+1) + (x+1)\ln(x+1) - x\right]_0^1$$

$$= -2 + 3\ln 2$$

إذن $\mathcal{A} = -2 + 3\ln 2$ وحدة المساحات

و بالتالي $\mathcal{A} = 4(-2 + 3\ln 2)\ cm^2$ أي $\mathcal{A} \approx 0{,}32\ cm^2$.

خواص جبرية

1 بسط : $\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)+\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

$4\ln(\sqrt{2}+1)+4\ln(\sqrt{2}-1)-5\ln 2$

$\frac{\ln(\sqrt{3}+1)+\ln(\sqrt{3}-1)}{2}$

$\frac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2})-4\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$

$2\ln e^4 \quad ; \quad 8-\ln\frac{1}{e}$

2 a و b عددان حقيقيان موجبان تماما.

عبر عن $\ln a^2b^3$ و $6\ln\frac{1}{\sqrt{a^2b}}$ بدلالة $\ln a$ و $\ln b$.

3 عبر عن الأعداد التالية بدلالة $\ln 2$ و $\ln 5$.

$\ln 500 \quad ; \quad \ln\frac{16}{25} \quad ; \quad \ln 6{,}25$

$\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+....+\ln\frac{98}{99}+\ln\frac{99}{100}$

4 في كل حالة من الحالات التالية، عين العدد الطبيعي n حيث : $2^n\le 10^3 \quad ; \quad \left(\frac{1}{4}\right)^n\le 10^{-2}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\le 0{,}1 \quad ; \quad 1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\ge 0{,}3$

معادلات

5 حل كل معادلة من المعادلات التالية في $\mathbb{R}$

$\ln x=2 \quad ; \quad \ln x=-2 \quad ; \quad \ln x=\frac{1}{2}$

$\ln|x|=2 \quad ; \quad \ln x^2=4 \quad ; \quad [\ln x]^2=4$

6 حل في $\mathbb{R}$ كل معادلة من المعادلات التالية :

$\ln(1-x)=2\ln 3-3\ln 2 \quad ; \quad \ln(1-x)^2=4\ln 2$

$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)=-3\ln 2 \quad ; \quad \ln\sqrt{1-x}=\frac{1}{2}\ln 3$

7 حل كل معادلة من المعادلات التالية في $\mathbb{R}$

$\ln(2x+7)=\ln(x-3)$

$\ln x+\ln(3x+2)=\ln(2x+3)$

$\ln(x-3)=\ln(x+7)-\ln(x+1)$

$\ln(x^2-2x-3)=\ln(x+7)$

$\ln\left(\frac{x+7}{x+1}\right)=\ln(x+3)$

$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=\ln(x+2)$

$\frac{1}{2}\ln(x-1)+\ln(x+1)=2+\ln\sqrt{1+x}$

8 $P(x)$ كثير حدود حيث

$P(x)=12x^3+x^2-9x+2$

1 • عين الأعداد الحقيقية a، b، c حيث من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $P(x)=(x+1)(ax^2+bx+c)$

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$.

2 • استنتج حلول المعادلة

$12(\ln x)^3+(\ln x)^2-9\ln x+2=0$

متراجحات

9 حل في $\mathbb{R}$ كل متراجحة من المتراجحات التالية : $\ln(3-x)\le 0 \quad ; \quad \ln\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)\ge 0$

$\ln(x+2)+\ln(3+x)>0$

$\ln(x^2-4)>\ln(6x+5)$

$\ln(2x-5)+\ln(x+1)\le 2\ln 2$

10 حل في $\mathbb{R}$ كل متراجحة من المتراجحات التالية : $\ln(x+1)>\ln(4x-2)-\ln(x-1)$

$\ln(x^2+11x+30)>\ln(x+14)$

$\ln(x^2-2e^2)\le\ln x+1 \quad ; \quad \ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right)\ge 0$

الجمل

11 حل كل جملة من الجمل التالية في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$\begin{cases}x+y=30\\ \ln x+\ln y=3\ln 6\end{cases} \quad ; \quad \begin{cases}x^2+y^2=5\\ \ln x+\ln y=\ln 2\end{cases}$

$\begin{cases}2\ln x+3\ln y=-2\\ 3\ln x+5\ln y=-4\end{cases} \quad ; \quad \begin{cases}\ln x+\ln y=\ln\frac{2}{3}\\ x+y=\frac{4}{3}\end{cases}$

$\begin{cases}5x+4y=12\\ \ln(x-1)+\ln y=\ln 3-\ln 5\end{cases} \quad ; \quad \begin{cases}\ln(x^2-y^2)=0\\ x-y=2\end{cases}$

النهايات

12 عين النهايات عند 0 و عند $+\infty$ لكل من الدوال التالية (عند وجودها) :

$x \longmapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ؛ $x \longmapsto \sqrt{1+(\ln x)^2}$

$x \longmapsto x - 2\ln x$ ؛ $x \longmapsto \frac{\ln x - 2}{\ln x + 1}$

13 عين النهايات عند $+\infty$ لكل دالة من الدوال التالية : (عند وجودها) $x \longmapsto x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$x \longmapsto \frac{\ln x}{x - \ln x}$ ؛ $x \longmapsto \frac{\ln(1+x^2)}{x}$

$x \longmapsto \frac{x^2 \ln x}{1+x}$ ؛ $x \longmapsto x\ln\left(\frac{2x-3}{x}\right)$

$x \longmapsto \ln\left(\frac{1+2e^x}{e^{2x}-1}\right)$ ؛ $x \longmapsto x - (\ln x)^2$

الدوال المشتقة

14 في كل حالة من الحالات التالية، عين مجموعة قابلية إشتقاق للدالة f ثمّ عبّر عن $f'(x)$

$f(x) = \ln(5x-1)$ ؛ $f(x) = \ln|7-2x|$

$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$ ؛ $f(x) = x^2 \ln x$

$f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ ؛ $f(x) = 3x + \ln(1+e^{-2x})$

$f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$ ؛ $f(x) = \ln(4x^2-3x-1)$

$f(x) = x^2\ln(1+x)$ ؛ $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

تعيين دوال أصلية

15 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{2e^x + 1}$$

- اثبت أنه يوجد عددان حقيقيان a ، b حيث من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f(x) = a + \frac{be^x}{2e^x+1}$
- عين دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

16 g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 4}$$

- أثبت أنه يوجد عددان حقيقيان a ، b حيث من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$$g(x) = ae^x + \frac{be^x}{e^x+4}$$

- عين الدالة الأصلية للدالة g التي تنعدم عند 0.

الدوال الأسية و الدوال اللوغاريتم العشري

17 بسط كتابة العدد $a = \frac{\sqrt[6]{6}\,(\sqrt[3]{2})^2\,\sqrt{12}}{\sqrt[3]{3^4}\,\sqrt{\sqrt[3]{6^2}}}$

- بالرفع إلى القوة 6.
- باستعمال القوى الناطقة.

18 بسط الأعداد التالية : $\sqrt[3]{8}$ ؛ $\sqrt[4]{81^3}$ ؛ $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$

$\frac{\sqrt[5]{4^2}\,\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{8}}$ ؛ $\frac{(\sqrt[3]{4})^2\,\sqrt[4]{2}}{\sqrt[10]{4^3}}$

19 حل في $\mathbb{R}$ كل معادلة من المعادلات التالية :

$4^x + 3\times 2^x + 10 = 0$ ؛ $9^x - 3^{x+2} = \frac{3^5}{4}$

$2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}$ ؛ $x^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)^x$

20 عين مجموعة تعريف و الدالة المشتقة f' لكل دالة من الدوال f التالية :

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ ؛ $f(x) = 2^x$

$f(x) = x^2 3^x$ ؛ $f(x) = x^x$

$f(x) = (\ln x)^x$ ؛ $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

21 عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها في كل حالة من الحالات التالية :

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ؛ $f(x) = x^\pi$

$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ؛ $f(x) = \frac{x^x}{\ln x}$

22 عين دالة أصلية للدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$

$f(x) = x^2\sqrt{x}$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$

$f(x) = 5^x$ ؛ $I = \mathbb{R}$

مسائل

23 نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي

$$f(x) = (x-1)\ln(x^2)$$

و $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1 • عين مجموعة تعريف الدالة f.

2 • عين نهايات f عند حدود مجموعة تعريفها.

3 • أدرس تغيرات الدالة f.

4 • حل المعادلة $f(x) = 0$.

5 • ارسم المنحني $(\mathscr{C})$.

24 نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

و $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1 • عين D_f مجموعة تعريف الدالة f.

2 • بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من D_f $(-x)$ ينتمي إلى D_f و $f(-x) = -f(x)$.
ما هو التفسير البياني الذي تعطيه لهذه النتيجة ؟

3 • بين أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة يطلب تعيين معادلة لكل منها.

4 • ادرس تغيرات الدالة f.

5 • عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة e.

6 • ارسم (Δ) و $(\mathscr{C})$ في المعلم السابق.

25 f هي الدالة المعرفة $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = x - 4 + \ln(1 + e^{3x})$$

و $(\mathscr{C})$ هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1 • أثبت أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2 • احسب نهاية $\ln(1 + e^{3x})$ عند $-\infty$.

3 • استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحى $(\mathscr{C})$ ثم عين معادلة له.

4 • بين أن من اجل كل عدد حقيقي x،

$$f(x) = 4x - 4 + \ln(1 + e^{-3x})$$

5 • ما هي نهاية $\ln(1 + e^{-3x})$ عند $+\infty$ ؟

6 • استنتج وجود مستقيم مقارب آخر للمنحني $(\mathscr{C})$ ثم عين معادلة له.

7 • ارسم المستقيمين المقاربين و المنحنى $(\mathscr{C})$ في نفس المعلم.

26 f هي الدالة العددية المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}+5}{e^{2x}-2}\right)$$

و $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1 • ما هي مجموعة التعريف E للدالة f ؟

2 • ادرس تغيرات الدالة f و كذا نهاياتها عند حدود مجموعة التعريف E.

3 • لتكن g الدالة المعرفة على E كما يلي

$$g(x) = f(x) - x$$

• عين نهاية $g(x)$ لما يؤول x إلى $+\infty$.

• ادرس إشارة $g(x)$.

• ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة إلى المنحنى $(\mathscr{C})$ ؟

4 • ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$.

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي

و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.



Hard_equation

6 - المتتاليات العددية

I - مبدأ الإستدلال بالتراجع

P_n خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي n.
إذا كانت الخاصية P_0 صحيحة و من أجل كل عدد طبيعي n، P_n يستلزم P_{n+1}
فإن من أجل كل عدد طبيعي n، P_n صحيحة.

• كيفية البرهان بالتراجع

للبرهان بالتراجع على أن خاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n نتبع المراحل التالية :

1 • نتحقق أن P_0 صحيحة.
2 • نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n كيفي و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة.
3 • نستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي n، P_n صحيحة.

ملاحظة : يمكن أن تكون الخاصية P_n معرفة من أجل $n \geq n_0$.
في هذه الحالة، نتحقق أن P_{n_0} صحيحة و نفرض أن P_n صحيحة من أجل العدد الطبيعي n حيث $n \geq n_0$، و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة.
ثم نستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$ ، P_n صحيحة.

II - المتتاليات العددية

1• توليد متتالية

1 • 1 • يمكن توليد متتالية عددية إذا كانت معرفة بحدها العام.
مثال : (v_n) متتالية معرفة بحدها العام $v_n = n + 3$
للحصول على حد معين يكفي تعويض n بالعدد الطبيعي المناسب.
لدينا $v_{10} = 10 + 3 = 13$ ؛ $v_{27} = 27 + 3 = 30$

1 • 2 • يمكن توليد متتالية عددية إذا كانت معرفة بعلاقة تراجعية من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$
حيث f هي الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n).
مثال : المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = u_n + 2$
هي متتالية معرفة بعلاقة تراجعية.
لدينا $u_1 = 4$ ؛ $u_2 = 6$ ؛ $u_3 = 8$ ؛ $u_4 = 10$.

ملاحظة 1 : في المتتالية (v_n) ، v_{27} هو أحد حدودها، 27 هو دليله،
أما رتبته فهي متعلقة بعدد الحدود التي تسبقه.
رتبة الحد v_k بالنسبة إلى الحد v_b حيث $b < k$ هي $b - k + 1$.
رتبة الحد v_{27} بالنسبة إلى الحد v_0 هي $27 - 0 + 1$ أي 28.
رتبة الحد v_{27} بالنسبة إلى الحد v_1 هي $27 - 1 + 1$ أي 27.
رتبة الحد v_{27} بالنسبة إلى الحد v_5 هي $27 - 5 + 1$ أي 23.

ملاحظة 2 : المتتالية (v_n) المعرفة بحدها العام $v_n = n + 3$ هي من الشكل $v_n = f(n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بالمتتالية (v_n) و المعرفة كما يلي $f(x) = x + 3$.

المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n + 2$ هي من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) و المعرفة كما يلي : $f(x) = x + 2$.

1 • 3 • المتتاليات الحسابية و المتتاليات الهندسية

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$.

المتاليات الحسابية	المتاليات الهندسية
تعريف : (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = u_n + r$. r يسمى أساس المتتالية الحسابية (u_n).	**تعريف :** (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = qu_n$. q يسمى أساس المتتالية الهندسية (u_n).
الحد العام لمتتالية حسابية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r. الحد العام u_n معرف كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n = u_0 + nr$.	**الحد العام لمتتالية هندسية** (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q الحد العام u_n معرف كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n = u_0 \times q^n$.
حساب المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$ (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = n\left(\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}\right)$ حيث n هو عدد حدود المجموع S. **ملاحظة :** يمكن كتابة المجموع S على الشكل التالي : $S = nu_0 + \frac{n(n-1)r}{2}$	**حساب المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$** (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q. • إذا كان $q = 1$ فإن $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = nu_0$ • إذا كان $q \neq 1$ فإن $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = u_0\left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right)$ حيث n هو عدد حدود المجموع S.
ملاحظة : إذا كان $r = 1$ فإن كل حدود المتتالية الحسابية مساوية للحد u_0.	**ملاحظة :** • إذا كان $q = 1$ فإن كل حدود المتتالية الهندسية مساوية للحد u_0. • إذا كان $q = 0$ فإن كل الحدود بدءا من u_1 منعدمة. • إذا كان $q = -1$ فإن من أجل كل عدد طبيعي n ، $\lvert u_n \rvert = \lvert u_0 \rvert$.

2. خواص المتتاليات

2. 1. اتجاه تغير متتالية عددية

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$.

- (u_n) متزايدة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} \geq u_n$.
- (u_n) متناقصة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} \leq u_n$.
- (u_n) ثابتة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = u_n$.
- إذا كانت (u_n) متزايدة أو متناقصة نقول إنها رتيبة.

ملاحظة 1 : ندرس بنفس الطريقة اتجاه تغير المتتالية (u_n) إذا كانت معرفة على جزء من $\mathbb{N}$.

ملاحظة 2 : نستنتج اتجاه تغير متتالية حسابية (u_n) حسب إشارة أساسها r.

$r > 0$	$r < 0$	$r = 0$
(u_n) متزايدة تماما	(u_n) متناقصة تماما	(u_n) ثابتة

و نستنتج اتجاه تغير متتالية هندسية (u_n) حسب إشارة حدها الأول u_0 و قيمة أساسها q.

	$0 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$u_0 > 0$	(u_n) متناقصة تماما	(u_n) ثابتة	(u_n) متزايدة تماما
$u_0 < 0$	(u_n) متزايدة تماما		(u_n) متناقصة تماما

- إذا كان $q < 0$ فإن المتتالية الهندسية (u_n) ليست رتيبة.
- إذا كان $q = 0$ فإن المتتالية الهندسية (u_n) ثابتة بدءا من u_1.

2. 2. المتتاليات المحدودة

تعاريف

(u_n) متتالية عددية.

- المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى إذا وجد عدد حقيقي M حيث من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n \leq M$.
- المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل إذا وجد عدد حقيقي m حيث من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n \geq m$.
- المتتالية (u_n) محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى و من الأسفل.

2 .3 . نهاية متتالية عددية

(u_n) متتالية عددية و ℓ عدد حقيقي.

تعريف

العدد الحقيقي ℓ هو نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$ إذا وفقط إذا كان من أجل كل مجال $]\alpha ; \beta[$ يوجد عدد طبيعي p بحيث مهما يكن العدد الطبيعي n يحقق $n \geq p$ ؛ u_n ينتمي إلى المجال $]\alpha ; \beta[$. نكتب $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

ملاحظات

- إذا كانت نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$ عددا حقيقيا ℓ نقول إن (u_n) متقاربة.
- إذا كانت نهايتها $+\infty$ أو $-\infty$ أو غير موجودة فإن (u_n) غير متقاربة و نقول عنها إنها متباعدة.

مبرهنة

إذا كانت متتالية متقاربة فإن نهايتها وحيدة.

2 .4 . مبرهنات حول نهايات متتاليات

مبرهنة

(u_n) متتالية معرفة بعلاقة من الشكل $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال $[\alpha ; +\infty[$.

α عدد حقيقي. ℓ هو عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$.

إذا كان $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ فإن $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

مبرهنة

f دالة معرفة على مجال I و $\ell \in I$ ؛ (u_n) متتالية معرفة بعلاقة من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$

و من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n \in I$.

إذا كانت (u_n) متقاربة نحو ℓ و f مستمرة عند ℓ فإن $\ell = f(\ell)$.

المبرهنات المتعلقة بحساب نهايات متتاليات

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان ؛ ℓ و ℓ' عددان حقيقيان.

- نهاية مجموع متتاليتن

إذا كانت $\lim_{n \to +\infty} u_n$ هي	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
و $\lim_{n \to +\infty} v_n$ هي	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
فإن $\lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n)$ هي	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	حالة عدم تعيين

• نهاية جداء متتاليتن

إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ هي	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ هي	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n$ هي	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	حالة عدم تعيين

• نهاية حاصل قسمة متتاليتن

إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ هي	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ هي	$\ell'\neq 0$	∞	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	∞
فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$ هي	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	حالة عدم تعيين

إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ هي	$\ell'>0$ أو $+\infty$	$\ell'>0$ أو $+\infty$	$\ell'<0$ أو $-\infty$	$\ell'<0$ أو $-\infty$	0
و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ هي	0 بقيم موجبة	0 بقيم سالبة	0 بقيم موجبة	0 بقيم سالبة	0
فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$ هي	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	حالة عدم تعيين

ملاحظة : توجد حالات، لا يمكن النص فيها عن النتيجة بتطبيق المبرهنات المتعلقة بمجموع متتاليتين، أو جداء متتاليتين أو حاصل قسمة متتاليتين. تسمى حالات عدم التعيين و هي من الشكل

$$+\infty - \infty \;;\; 0\times\infty \;;\; \frac{0}{0} \;;\; \frac{\infty}{\infty}.$$

2• 5 • النتائج المتعلقة بالحصر و المقارنة

مبرهنة 1

• إذا كانت متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة.
• إذا كانت متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة.

مبرهنة 2

• إذا كانت متتالية متقاربة فإنها محدودة.

ملاحظة : العكس غير صحيح.

مبرهنة 3

(u_n)، (v_n)، (w_n) متتاليات عددية، ℓ عدد حقيقي.

إذا كان (بدءا من مرتبة معينة)	و كان ...	فإن ...
$u_n \leq w_n$	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$
$v_n \leq u_n$	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$	$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$
$\lvert v_n - \ell \rvert \leq u_n$	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$	$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$
$v_n \leq u_n \leq w_n$	$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

2 . 6 . نهاية متتالية هندسية

مبرهنة

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q.

- إذا كان $q > 1$ و $u_0 > 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- إذا كان $q > 1$ و $u_0 < 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
- إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
- إذا كان $q \leq -1$ فإن نهاية (u_n) غير موجودة.

ملاحظات

- إذا كانت المتتالية (u_n) متزايدة و غير محدودة من الأعلى فإنها متباعدة و $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- إذا كانت المتتالية (u_n) متناقصة و غير محدودة من الأسفل فإنها متباعدة و $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

III - المتتاليتان المتجاورتان

تعريف

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان.

نقول عن المتتاليتين (u_n) و (v_n) إنهما متجاورتان إذا تحقق ما يلي :

إحدى المتتاليتين متزايدة و الأخرى متناقصة و $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

مبرهنة 1

إذا كانت متتاليتان متجاورتين فكل منهما متقاربة و لهما نفس النهاية.

مبرهنة 2

(u_n) و (v_n) متتاليتان متجاورتان و نهايتهما ℓ.

إذا كانت (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة فإن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq \ell \leq v_n$.

إذا كانت (u_n) متناقصة و (v_n) متزايدة فإن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n \leq \ell \leq u_n$.

1 اثبات خاصية بالتراجع

تمرين 1

(u_n) متتالية معرفة كما يلي $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

• أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $0 < u_n < 2$.

حل

• لتكن P_n الخاصية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $0 < u_n < 2$.

• $u_0 = 1$ إذن $0 < u_0 < 2$. بالتالي P_0 صحيحة.

• ليكن n عددا طبيعيا. نفرض أن P_n صحيحة أي $0 < u_n < 2$.

نبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $0 < u_{n+1} < 2$.

لدينا $0 < u_n < 2$. إذن $2 < u_n + 2 < 4$.

ينتج أن $\sqrt{2} < \sqrt{u_n + 2} < 2$. و بالتالي $0 < \sqrt{u_n + 2} < 2$.

نستنتج أن $0 < u_{n+1} < 2$. أي P_{n+1} صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n، إذا كانت P_n صحيحة فإن P_{n+1} صحيحة.

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n ؛ P_n صحيحة.

• ينتج أن من أجل عدد طبيعي n ؛ $0 < u_n < 2$.

تمرين 2

• أثبت بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ؛ $n! \geq 2^{n-1}$

علما أن $1! = 1$ و من أجل $n \geq 2$ ؛ $n! = n(n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$.

حل

P_n هي الخاصية المعرفة من أجل $n \geq 1$ كما يلي : $n! \geq 2^{n-1}$.

• لدينا من أجل $n = 1$ ؛ $2^{1-1} = 2^0 = 1$ و $1! = 1$. إذن $1! \geq 2^{1-1}$ أي P_1 صحيحة.

• ليكن n عددا طبيعيا حيث $n \geq 1$. نفرض أن P_n صحيحة أي $n! \geq 2^{n-1}$.

نبرهن أن P_{n+1} صحيحة ؛ أي $(n+1)! \geq 2^n$.

نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ؛ $n + 1 \geq 2$.

لدينا $n! \geq 2^{n-1}$ و $n + 1 \geq 2$ إذن $(n+1)\,n! \geq 2^{n-1} \times 2$ أي $(n+1)! \geq 2^n$.

و بالتالي P_{n+1} صحيحة.

نستنتج أن من أجل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، إذا كانت P_n صحيحة فإن P_{n+1} صحيحة.

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، P_n صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ؛ $n! \geq 2^{n-1}$

تمرين 3

• أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

حل

نثبت ذلك بالتراجع.

• نضع P_n الخاصية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

• لدينا من أجل $n=1$ ؛ $\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

إذن من أجل $n=1$ ؛ $\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1+1}$ و بالتالي P_1 صحيحة.

• ليكن n عددا طبيعيا حيث $n \geq 1$ نفرض أن P_n صحيحة

أي من أجل عدد طبيعي $n \geq 1$ ؛ $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+1+1)}=\frac{n+1}{(n+1)+1}$

• حسب الفرض لدينا $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

ينتج أن $\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}\right)+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

لدينا $\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}=\frac{n+1}{(n+1)+1}$

و بالتالي $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{(n+1)+1}$

إذن من أجل العدد الطبيعي $n \geq 1$ إذا كان $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

فإن $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{(n+1)+1}$

نستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

2 استعمال التمثيل البياني لتخمين سلوك و نهاية متتالية عددية

تمرين 1

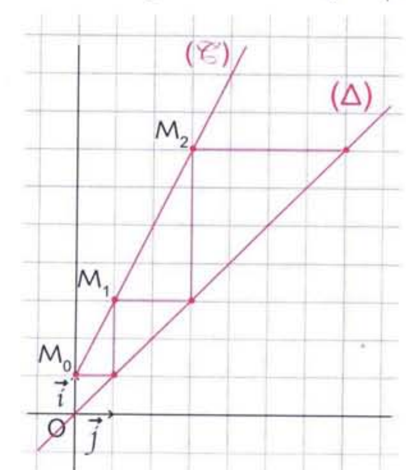
• مثل بيانيا كلا من المتتاليات (u_n) المعرفة كما يلي :

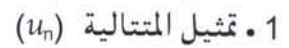
1. $u_0=0$ و $u_{n+1}=2u_n+1$
2. $u_0=0$ و $u_{n+1}=u_n^2+1$
3. $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{3+u_n}{u_n}$

استعمل تمثيل كل منها لتخمين سلوكها و نهايتها.

حل

• المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$. (Δ) هو المستقيم الذي معادلته $y = x$.





1 • تمثيل المتتالية (u_n)

حيث $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

f هي الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) و المعرفة على $\mathbb{R}^+$ كما يلي :

$f(x) = 2x + 1$ و $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني.

مجموعة النقط $M_n(u_n\,;u_{n+1})$ حيث $u_{n+1} = f(u_n)$

هي التمثيل البياني للمتتالية (u_n).

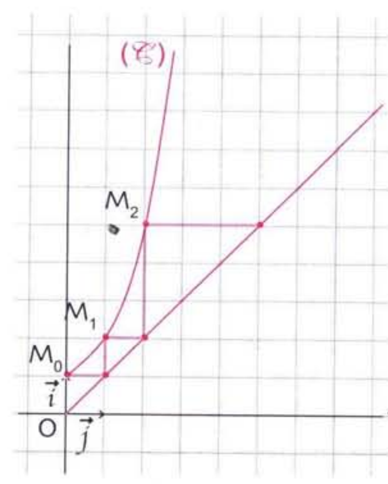
النقط $M_0(u_0\,;u_1)$، $M_1(u_1\,;u_2)$، $M_2(u_2\,;u_3)$، ...

هي نقط من التمثيل البياني للمتتالية.

$(\mathscr{C})$ هو المستقيم الذي معادلته $y = 2x + 1$.

النقط M_0، M_1، M_2، ... هي نقط من هذا المستقيم.

التخمين : المتتالية (u_n) متزايدة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.



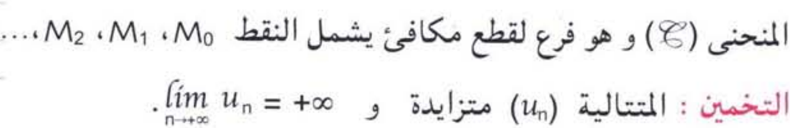
2 • تمثيل المتتالية (u_n) حيث $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

f هي الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) و $(\mathscr{C})$ التمثيل البياني

للدالة f المعرفة على $[0\,;+\infty[$ بـ $f(x) = x^2 + 1$.

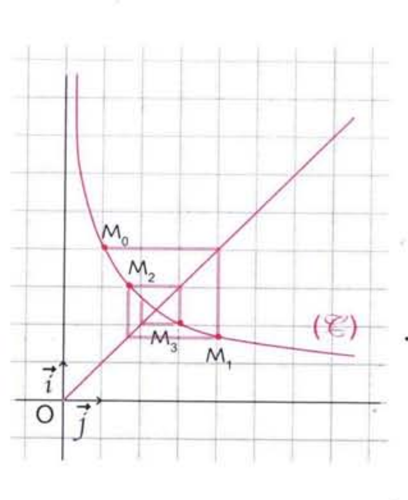
النقط $M_0(u_0\,;u_1)$، $M_1(u_1\,;u_2)$، $M_2(u_2\,;u_3)$، ...

نقط من التمثيل البياني للمتتالية (u_n).



المنحنى $(\mathscr{C})$ و هو فرع لقطع مكافئ يشمل النقط M_0، M_1، M_2، ...

التخمين : المتتالية (u_n) متزايدة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.



3 • تمثيل المتتالية (u_n) حيث $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{3 + u_n}{u_n}$.

f هي الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) و $(\mathscr{C})$ هو التمثيل البياني

للدالة f المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{3 + x}{x}$.

M_0، M_1، M_2، ... هي نقط من التمثيل البياني للمتتالية (u_n).

المنحني $(\mathscr{C})$ يشمل النقط M_0، M_1، M_2، ... و هو فرع قطع زائد.

التخمين : المتتالية (u_n) ليست رتيبة. المتتالية (u_n) متقاربة

و نهايتها هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع $(\mathscr{C})$.

3 دراسة سلوك و نهاية متتالية

تمرين 1

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي $u_{n+1} = \frac{n+3}{2n-1}$

1 • برهن أن المتتالية (u_n) محدودة.

2 • حدد اتجاه تغيراتها ثمّ عين $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

حل

1 • المتتالية (u_n) معرفة بعلاقة من الشكل $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة المعرفة على المجال $]1 ; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{x+3}{2x-1}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]1 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة هي f' حيث $f'(x) = \frac{-7}{(2x-1)^2}$.

لدينا $f'(x) < 0$ على المجال $]1 ; +\infty[$ و بالتالي f متناقصة على $]1 ; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f يكون كالآتي :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	4 ↘	$\frac{1}{2}$

من جدول تغيرات f ينتج أن على المجال $]1 ; +\infty[$

$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 4$. و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم

$\frac{1}{2} \leq u_n \leq 4$

أي المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد $\frac{1}{2}$ و من الأعلى بالعدد 4.

2 • الدالة f متناقصة على المجال $]1 ; +\infty[$ إذن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم $f(n+1) \leq f(n)$. أي من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم، $u_{n+1} \leq u_n$

و بالتالي المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}^*$.

بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = \frac{1}{2}$. إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

تمرين 2

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = 7$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} - 3$

1 • لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n = u_n + k$ ؛ $k \in \mathbb{R}$.

عين k بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية. حدد عندئذ أساسها و حدها الأول.

2 • عبر عن v_n و u_n بدلالة n.

3 • عين $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

حل

1 • من المساواة $v_n = u_n + k$ ينتج أن $u_n = v_n - k$. **تعيين** v_{n+1} بدلالة v_n.

لدينا $v_{n+1} = u_{n+1} + k = \left(\frac{u_n}{2} - 3\right) + k = \frac{1}{2}(v_n - k) - 3 + k = \frac{1}{2}v_n + \frac{k}{2} - 3$

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \frac{k}{2} - 3$.

تكون (v_n) متتالية هندسية إذا كان $\frac{1}{2}k - 3 = 0$ أي $k = 6$.

و بالتالي من أجل $k = 6$ المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول v_0

حيث $v_0 = u_0 + 6$ أي $v_0 = 13$.

1 • (v_n) متتالية هندسية إذن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n = v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

أي من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n = 13\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n = 13\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$.

3 • لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -6$.

تمرين 3

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = \frac{\sin n + (-1)^n}{n}$

1 • أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة.

2 • أدرس اتجاه تغير (u_n) ثمّ عين $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

حل

1 • نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم ، $-1 \le \sin n \le 1$ و $-1 \le (-1)^n \le 1$.

إذن $-2 \le \sin n + (-1)^n \le 2$ ينتج أن $-\frac{2}{n} \le \frac{\sin n + (-1)^n}{n} \le \frac{2}{n}$.

بما أن $n \ge 1$ فأن $0 < \frac{1}{n} \le 1$ و $0 < \frac{2}{n} \le 2$ و $-2 \le -\frac{2}{n} < 0$.

و بالتالي $-2 \le -\frac{2}{n} \le \frac{\sin n + (-1)^n}{n} \le \frac{2}{n} \le 2$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم، $-2 \le u_n \le 2$. ينتج أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2 و من الأسفل بالعدد 2-. إذن المتتالية (u_n) محدودة.

2 • من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم، $-1 \le \sin n \le 1$ و $-1 + (-1)^n \le \sin n + (-1)^n \le 1 + (-1)^n$

إذا كان n زوجيا فإن $n + 1$ فردي و بالتالي $0 \le u_n \le \frac{2}{n}$ و $-\frac{2}{n} \le u_{n+1} \le 0$.

إذا كان n فرديا فإن $n + 1$ زوجي و بالتالي $-\frac{2}{n} \le u_n \le 0$ و $0 \le u_{n+1} \le \frac{2}{n}$.

ينتج أن إذا كان n زوجيا فإن $u_{n+1} \leq u_n$.

إذا كان n فرديا فإن $u_{n+1} \geq u_n$.

و بالتالي (u_n) ليست متزايدة و ليست متناقصة على $\mathbb{N}^*$.

أي المتتالية (u_n) ليست رتيبة على $\mathbb{N}^*$.

• بما أن $-\frac{2}{n} \leq u_n \leq \frac{2}{n}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{2}{n} = 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4 معرفة و استعمال مفهوم المتتاليتين المتجاورتين

تمرين 1

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -\frac{1}{n+1}$ و $v_n = \frac{5}{2n+3}$.

• هل المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان ؟

حل

• دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n).

لدينا $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} = \frac{-n-1+n+2}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$.

إذن $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} - u_n > 0$

و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

• دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n).

لدينا $v_{n+1} - v_n = \frac{5}{2n+2+3} - \frac{5}{2n+3} = \frac{10n+15-10n-25}{(2n+5)(2n+3)} = \frac{-10}{(2n+5)(2n+3)}$.

إذن $v_{n+1} - v_n = \frac{-10}{(2n+5)(2n+3)}$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_{n+1} - v_n < 0$

و بالتالي المتتالية (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

• حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n)$.

لدينا $v_n - u_n = \frac{7n+8}{(2n+3)(n+1)} = \frac{7n+8}{2n^2+5n+3}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7n+8}{2n^2+5n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7n}{2n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{2n} = 0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

لدينا (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة و $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$ ،

إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

تمرين 2

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ و $v_n = \frac{n}{n+2}$.

• أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) غير متجاورتين.

حل

• دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n).

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{2n+3}{n+2} - \frac{2n+1}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$.

إذن $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$. **نلاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي** n ؛ $u_{n+1} - u_n > 0$

و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

• دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n).

لدينا $v_{n+1} - v_n = \frac{n+1}{n+3} - \frac{n}{n+2} = \frac{2}{(n+3)(n+2)}$.

إذن $v_{n+1} - v_n = \frac{2}{(n+3)(n+2)}$ **نلاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي** n ؛ $v_{n+1} - v_n > 0$

و بالتالي المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

المتتاليتان (u_n) و (v_n) لهما نفس اتجاه التغير إذن (u_n) و (v_n) غير متجاورتين.

تمرين 3

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

1 • بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

2 • عين حصرا لنهايتهما من أجل $n = 8$.

حل

1 • دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

لدينا $u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{n}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$

• حساب $u_{n+1} - u_n$

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$. **إذن من أجل كل عدد** n من $\mathbb{N}^*$؛ $u_{n+1} - u_n > 0$

ينتج أن المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}^*$.

• حساب $v_{n+1} - v_n$

لدينا $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!}$

نلاحظ أن من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}^*$ ؛ $\frac{1-n}{(n+1)!} \le 0$.

إذن المتتالية (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}^*$.

لدينا $\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة و المتتالية (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}^*$ و $\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$

فأن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

2 • بما أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان فإن كلا منهما متقاربة و لهما نفس النهاية ℓ

التي تحقق من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$ ؛ $u_n \le \ell \le v_n$.

لنحصل على الحصر التالي حسب قيم العدد الطبيعي n من $\mathbb{N}^*$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$ ؛ $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$

تعيين حصر من أجل n = 8 لنهاية (u_n) باستعمال المتباينة المضعّفة $u_n \le \ell \le v_n$

و قيم العدد الحقيقي $\frac{1}{n!}$.

لدينا $1 \le 1 \le 1$

$1 \le \frac{1}{1!} \le 1$

$0{,}5 \le \frac{1}{2!} \le 0{,}5$

$0{,}1666666 \le \frac{1}{3!} \le 0{,}16666667$

$0{,}0416666 \le \frac{1}{4!} \le 0{,}0416667$

$0{,}0083333 \le \frac{1}{5!} \le 0{,}0083334$

$0{,}0013888 \le \frac{1}{6!} \le 0{,}0013889$

$0{,}0001984 \le \frac{1}{7!} \le 0{,}0001985$

$0{,}0000248 \le \frac{1}{8!} \le 0{,}0000249$

بالجمع طرف لطرف نجد $2{,}7182785 \le \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \le 2{,}7182791$

أي $2{,}7182785 \le \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{k!} \le 2{,}7182791$

و بالتالي $2{,}7182785 \le u_n \le 2{,}7182791$ من أجل n = 8 .

ينتج أن $2{,}7182785 \le \lim_{n\to+\infty} u_n \le 2{,}7182791$

إذن $2{,}7182785 \le \ell \le 2{,}7182791$.

ملاحظة : يمكن تعيين حصر للعدد ℓ من أجل n أكبر، و تقريب ℓ من e أساس اللوغاريتم النيبيري.

مسألة

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_0 = -1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = \dfrac{3 + 2u_n}{2 + u_n}$

1 • احسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3.

2 • برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم ؛ $u_n > 0$.

3 • أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد $\sqrt{3}$.

4 • أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

5 • احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

حل

1 • حساب u_1 ، u_2 ، u_3.

لدينا $u_0 = -1$ ؛ $u_1 = \dfrac{3 + 2u_0}{2 + u_0} = \dfrac{3 - 2}{2 - 1} = 1$ أي $u_1 = 1$.

$u_2 = \dfrac{3 + 2}{2 + 1} = \dfrac{5}{3}$ أي $u_2 = \dfrac{5}{3}$.

$u_3 = \dfrac{3 + \frac{10}{3}}{2 + \frac{5}{3}} = \dfrac{19}{11}$ أي $u_3 = \dfrac{19}{11}$.

2 • نبرهن أن من أجل كل عدد n طبيعي غير منعدم ؛ $u_n > 0$.

من أجل ذلك نطبق الإستدلال بالتراجع.

لتكن P_n الخاصية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n > 0$.

من أجل $n = 1$ ؛ $u_1 = 1$. إذن $u_1 > 0$

إذن الخاصية P_n صحيحة من أجل $n = 1$.

نفرض أن P_n صحيحة من أجل العدد الطبيعي غير المنعدم n ؛ أي $u_n > 0$

نبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $u_{n+1} > 0$.

نعلم أن $u_n > 0$. إذن $3 + 2u_n > 0$ و $2 + u_n > 0$. و بالتالي $\dfrac{3 + 2u_n}{2 + u_n} > 0$.

ينتج أن $u_{n+1} > 0$ أي P_{n+1} صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي غير منعدم n ؛ P_n صحيحة.

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم ؛ $u_n > 0$.

3 • إثبات أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد $\sqrt{3}$.

من أجل ذلك نثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n \leq \sqrt{3}$.

نضع P'_n الخاصية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n \leq \sqrt{3}$.

من أجل $n = 0$ ؛ $-1 \leq \sqrt{3}$ إذن $u_0 \leq \sqrt{3}$ أي P'_n صحيحة من أجل $n = 0$.

إذن الخاصية P'_n صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن P'_n صحيحة من أجل العدد الطبيعي n و نبرهن أن P'_{n+1} صحيحة أي $u_{n+1} \leq \sqrt{3}$

من أجل ذلك يكفي أن نبرهن أن $u_{n+1} - \sqrt{3} \leq 0$.

لدينا
$$u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} - \sqrt{3} = \frac{(3 - 2\sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})u_n}{2 + u_n} = \frac{(2 - \sqrt{3})(u_n - \sqrt{3})}{2 + u_n}$$

نعلم أن $2 - \sqrt{3} > 0$ و $u_n - \sqrt{3} \leq 0$ و $2 + u_n > 0$ إذن $u_{n+1} - \sqrt{3} \leq 0$

و بالتالي $u_{n+1} \leq \sqrt{3}$. نستنتج أن P'_n صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n \leq \sqrt{3}$.

4 • دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n).

ندرس إشارة $u_{n+1} - u_n$.
$$u_{n+1} - u_n = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} - u_n = \frac{3 - u_n^2}{2 + u_n} = \frac{(\sqrt{3} - u_n)(\sqrt{3} + u_n)}{2 + u_n}$$

نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم، $u_n > 0$ و $u_n \leq \sqrt{3}$

إذن من أجل كل عد طبيعي n غير منعدم ؛ $\frac{3 - u_n^2}{2 + u_n} \geq 0$

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم ؛ $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

من أجل $n = 0$ ؛ لدينا $u_1 - u_0 = 1 - (-1) = 2$ أي $u_1 - u_0 = 2$ إذن $u_1 - u_0 > 2$.

ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

5 • حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

نعلم أن المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$ و محدودة من الأعلى بالعدد $\sqrt{3}$ ، إذن (u_n) متقاربة.

الدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) هي الدالة المستمرة على $]0 ; +\infty[$ حيث $f(x) = \frac{3 + 2x}{2 + x}$

نضع $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$. نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي غير منعدم ؛ $u_n > 0$.

نبحث عن ℓ في المجال $]0 ; +\infty[$ حيث $\ell = f(\ell)$.

لدينا $\ell = f(\ell)$ يعني $\frac{3 + 2\ell}{2 + \ell} = \ell$. أي $\ell^2 = 3$. ينتج أن $\ell = \sqrt{3}$. إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{3}$.

الاستدلال بالتراجع

1 (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$

1 • برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي $0 < u_n < 3$.

2 • برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة.

2 (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

1 • برهن أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}$ ؛ $u_n < 2$.

2 • برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة.

3 (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_0 = 9$ و $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$

1 • برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n > 3$.

2 • برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة.

4 (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 2u_n - 3$

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n = 3 - 2^n$

5 (u_n) هي المتتالية المعرفة كما يلي :

$u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{4 + u_n}$

1 • أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛

$0 \le u_n \le 1$.

2 • ما هو اتجاه تغير الدالة $x \longmapsto \dfrac{1 + x}{4 + x}$

على المجال $[0 ; 1]$ ؟

3 • ما هو أتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

6 برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم ؛ $4^n - 1$ مضاعف 3.

7 برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n $7 \times 3^{5n} + 4$ يقبل القسمة على 11.

8 برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n $4^n - 3n - 1$ يقبل القسمة على 9.

9 برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n $n^3 - n$ يقبل القسمة على 3.

10 a عدد حقيقي موجب تماما. برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $(1+a)^n \ge 1 + na$.

11 ليكن العدد S_n حيث

$S_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

برهن بالتراجع أن مهما يكن العدد الطبيعي n

$S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

12 ليكن العدد S_n حيث

$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$

برهن بالتراجع أن مهما يكن العدد الطبيعي n

$S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

توليد متتاليات

13 (u_n) هي المتتالية المعرفة كما يلي:

$u_0 = 1$ ؛ $u_1 = 2$ و $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}$

• عبر عن u_n بدلالة n.

• ادرس سلوك المتتالية (u_n).

• في التمارين 14، 15، 16، 17 يطلب تمثيل المتتالية (u_n) و تخمين سلوكها و تعيين نهايتها إن وجدت.

14 $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 1 - 2u_n$

15 $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \dfrac{1 - u_n}{1 + u_n}$

16 $u_0 = \dfrac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$

17 $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$

خواص المتتاليات

18 ادرس إن كانت المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل أو من الأعلى أو محدودة في كل من الحالات التالية :

1. $u_n = \frac{n+2}{n}$
2. $u_n = \frac{n^2+1}{n}$
3. $u_n = \frac{n+3}{2n-1}$

19 نفس السؤال بالنسبة إلى المتتاليات (u_n) التالية:

1. $u_n = \frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}$
2. $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$
3. $u_n = 4^n - 3^n$

20 برهن أن المتتالية المعرفة كما يلي : $u_0 = \frac{1}{7}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}$ محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{3}{4}$.

21 ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_n = \frac{n+1}{n}$ و $v_n = -n$

22 ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين الهندسيتين (u_n) و (v_n) بعد تعيين حدها الأول (من أجل $n = 0$)

$u_n = 2^{n-1}$ و $v_n = \frac{1}{3^{n-1}}$

23 ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي

$u_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$ و $v_n = (-2)^{n-1}$

24 (u_n) هي متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

1. برهن أن (u_n) متناقصة.
2. أثبت أن (u_n) متقاربة. ما هي نهايتها ؟

25 ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليات الهندسية (u_n) التالية علما أن حدها الأول u_0 و أساسها q.

1. $u_0 = -2$ و $q = \frac{1}{3}$.
2. $u_0 = \frac{2}{3}$ و $q = -\frac{\sqrt{2}}{3}$.

26 ادرس اتجاه تغير المتتالية الهندسية (v_n) التالية علم حدها الأول v_0 و أساسها q.

1. $v_0 = 1$ و $q = 2$.
2. $v_0 = -1$ و $q = -3$.

27 ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي :

1. $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{n+7}$.
2. $v_0 = 8$ و $v_{n+1} = \sqrt{3v_n + 1}$.

28 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$u_n = 1 + n + \sin n$$

1. أحصر (u_n) بمتتاليتين حسابيتين (v_n) و (w_n).
2. استنتج نهاية (u_n) لما يؤول n إلى $+\infty$.

29 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي

$$u_n = \frac{n^4}{n!}$$

ادرس اتجاه تغير (u_n) و نهايتها إن وجدت.

30 (u_n) متتالية معرفة كما يلي :

$u_0 = 2$ و $2u_n = u_{n+1} + 1$.

1. برهن أن المتتالية (v_n) المعرفة بحدها العام $v_n = u_n - 1$ هي متتالية هندسية.
2. عبر عن u_n بدلالة n.
3. ادرس نهاية (u_n).

31 (u_n) متتالية معرفة كما يلي :

$u_0 = 3$ و $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} - 4$.

1. ادرس اتجاه تغير هذه المتتالية.
2. (v_n) هي المتتالية المعرفة كما يلي : $v_n = u_n + 6$. أثبت أن (v_n) متتالية هندسية. عين v_n بدلالة n.
3. ما هي نهاية (u_n) ؟

المتتاليتان المتجاورتان

32 (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$

كما يلي : $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ و $v_n = \frac{2n+7}{n+2}$.

أثبت أن (u_n) و (v_n) متجاورتان و عين نهايتهما.

33 (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$

كما يلي : $u_n = \frac{3n+4}{n+1}$ و $v_n = \frac{3n^2+4}{n^2+1}$.

أثبت أن (u_n) و (v_n) غير متجاورتين.

34 (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}^*$

كما يلي : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$

أثبت أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

35 (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}^*$

كما يلي : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

أثبت أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

مسائل

36 (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_0 = 1$ و $u_n = u_{n-1} + n^2 - n + 5$.

1 • عين الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية.

2 • برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم ؛

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

3 • برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم ؛

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4 • استنتج عبارة u_n بدلالة n.

5 • هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

37 نعرف المتتالية (u_n) بحدها الأول $u_0 = 0$

و علاقة التراجع التالية $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}$

1 • احسب الحدود u_1، u_2، u_3.

2 • لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-2 ; +\infty[$

كما يلي $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

و $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ، (الوحدة 2cm).

أ) • ارسم المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحنى $(\mathscr{C})$ في المعلم السابق.

ب) • استعمل المستقيم (Δ) و المنحنى $(\mathscr{C})$ لتمثيل النقط من محور الفواصل التي فواصلها هي u_0، u_1، u_2، u_3.

جـ) • ماذا يمكن تخمينه حول سلوك المتتالية (u_n) ؟

3 • برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة.

4 • أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 2$

5 • احسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

38 (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$

كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2} \end{cases}$

1 • احسب الحدود u_1، u_2، u_3.

2 • نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $\left[\frac{2}{3} ; +\infty\right[$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{3x - 2}$

ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة 1cm).

(Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

أ) • ارسم (Δ) و $(\mathscr{C})$ في المعلم السابق.

ب) • باستعمال المستقيم (Δ) و المنحنى $(\mathscr{C})$، عين النقط من $(\mathscr{C})$ التي فواصلها u_0، u_1، u_2، u_3.

جـ) • ماذا يمكن تخمينه حول سلوك المتتالية (u_n) ؟

3 • أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 2.

4 • أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة.

5 • استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

6 • احسب نهاية المتتالية (u_n).

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي

و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة. 

Hard_equation

7 - الحساب التكاملي

I - تكامل دالة مستمرة

1 . تعريف

f دالة معرفة و مستمرة على مجال I. a و b عددان من I.

F دالة أصلية للدالة f على المجال I.

العدد F(b) - F(a) يسمى التكامل من a إلى b للدالة f.

يرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x)\,dx$ و يقرأ التكامل من a إلى b لـ $f(x)$ تفاضل x.

و نكتب $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

ملاحظة : العدد $\int_a^b f(x)\,dx$ يتعلق بالدالة f ، a و b فهو مستقل عن المتغير x.

أي أن $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz$.

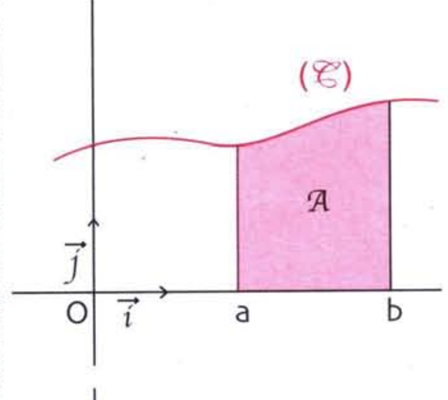
2 . التفسير الهندسي

المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في هذا المعلم.

. الدالة f موجبة على المجال [a ; b]

العدد الحقيقي الموجب $\int_a^b f(x)\,dx$ هو مساحة الحيز $\mathcal{A}$ للمستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = a$ و $x = b$.

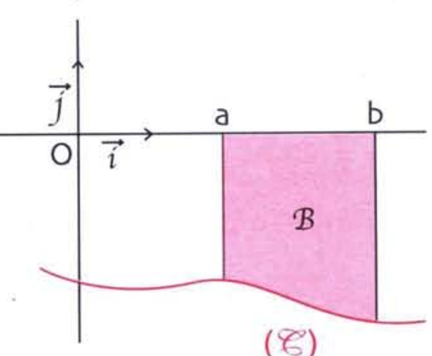
نكتب : $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.



. الدالة f سالبة على المجال [a ; b]

العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)\,dx$ سالب و العدد الحقيقي الموجب $-\int_a^b f(x)\,dx$ هو مساحة الحيز $\mathcal{B}$ للمستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$، محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = a$ و $x = b$.

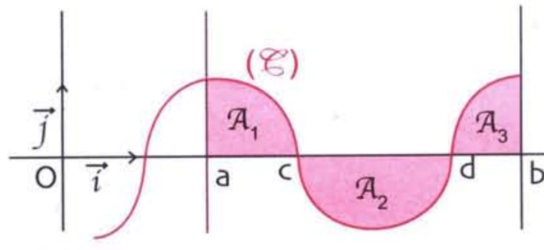
نكتب : $\mathcal{B} = -\int_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b)$.



. إشارة الدالة f تتغير على المجال [a ; b]

الدالة f معرفة و مستمرة على المجال [a ; b].

العدد الحقيقي $\int_a^b |f(x)|\,dx$ هو مساحة الحيز $\mathcal{A}$ للمستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = a$ و $x = b$



في الشكل يظهر أن : $\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)|\, dx = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$

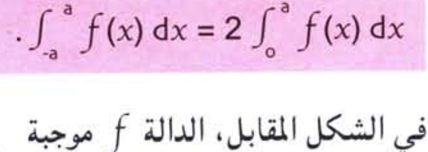
$$= \int_a^c f(x)\, dx - \int_c^d f(x)\, dx + \int_d^b f(x)\, dx$$

II - الخواص

خاصية الخطية للتكامل

f و g دالتان معرفتان و مستمرتان على مجال I. a و b عددان من المجال I. من أجل كل عددين حقيقيين α و β ؛ $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$

شفعية الدالة



f دالة معرفة و مستمرة على مجال I.

إذا كانت f زوجية على I.

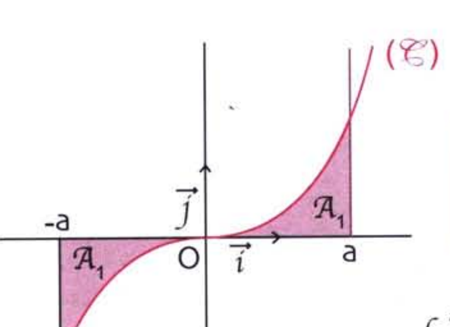
فإن من أجل كل عدد a من I ؛

$\int_{-a}^a f(x)\, dx = 2 \int_0^a f(x)\, dx$.

في الشكل المقابل، الدالة f موجبة

إذن $\int_{-a}^a f(x)\, dx = 2\, \mathcal{A}_1$

(و إذا كانت f سالبة فإن $\int_{-a}^a f(x)\, dx = -2\, \mathcal{A}_1$)



• إذا كانت f فردية على I

فإن من أجل كل عدد a من I ؛ $\int_{-a}^a f(x)\, dx = 0$

في الشكل المقابل، الدالة f موجبة على $[0 ; a]$

و سالبة على $[-a ; 0]$. إذن $\int_{-a}^a f(x)\, dx = -\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_1 = 0$

علاقة شال

f دالة معرفة و مستمرة على مجال I.

• من أجل كل عدد a من I ؛ $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

• من أجل كل أعداد a، b و c من I ؛ $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$ (علاقة شال)

نتيجة : من أجل كل عددين a و b من I ؛ $\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$

(أو أيضا : $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$)

مبرهنة (إيجابية التكامل)

f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a ; b]$.

• إذا كان من أجل كل عدد x من $[a ; b]$، $f(x) \geq 0$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

مبرهنة

f و g دالتان معرفتان و مستمرتان على المجال $[a ; b]$.

• إذا كان من أجل كل عدد x من $[a ; b]$، $f(x) \leq g(x)$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

مبرهنة (متباينة المتوسط)

f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a ; b]$.

• إذا كان m و M عددين حقيقيين حيث من أجل كل عدد x من $[a ; b]$، $m \leq f(x) \leq M$

فإن $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

التفسير الهندسي

بفرض أن f موجبة على $[a ; b]$.

• يكون $m(b-a)$ هي مساحة المستطيل الذي بعداه $b-a$ و m.

$M(b-a)$ هي مساحة المستطيل الذي بعداه $b-a$ و M.

$\int_a^b f(x)\,dx$ هي مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$، محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = a$ و $x = b$.

القيمة المتوسطة لدالة

f دالة معرفة و مستمرة و موجبة على مجال $[a ; b]$.

تعريف

القيمة المتوسطة للدالة f على مجال $[a ; b]$ هي العدد الحقيقي $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

مبرهنة (حصر القيمة المتوسطة)

إذا كان m و M عددين حقيقيين حيث من أجل كل عدد x من $[a ; b]$، $m \leq f(x) \leq M$

فإن $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$.

III - التكاملات و الدوال الأصلية

مبرهنة

إذا كانت f مستمرة على مجال I و $a \in I$ فإن الدالة F المعرفة على I كما يلي :

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f التي تنعدم عند a.

المكاملة بالتجزئة

إذا كانت u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I حيث الدالتان u' و v' مستمرتان على I.

فإن $\int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt = [u(t)\,v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt$.

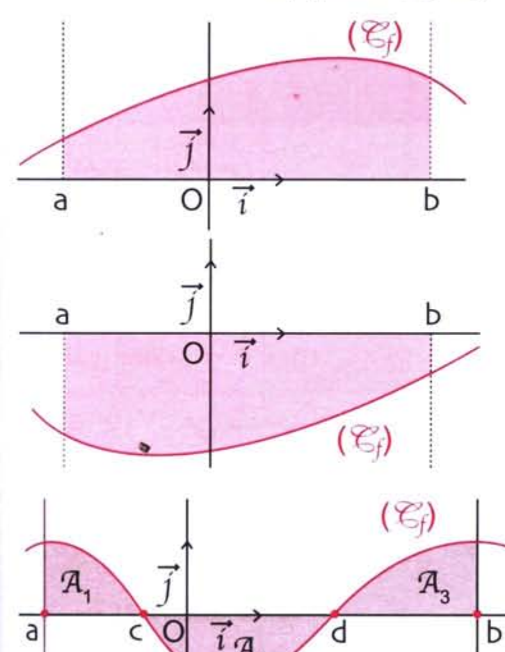
هذه الطريقة لحساب $\int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$ تسمى المكاملة بالتجزئة.

حساب مساحات محدودة بمنحن

f دالة مستمرة على مجال I ؛ a و b عددان من I حيث $a < b$.

$(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

$\mathcal{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحني $(\mathcal{C}_f)$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = a$ و $x = b$.



مبرهنة

- إذا كان من أجل كل عدد x من المجال $[a ; b]$ ، $f(x) \geq 0$ فإن $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx$ (وحدة المساحات)
- إذا كان من أجل كل عدد x من المجال $[a ; b]$، $f(x) \leq 0$ فإن $\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)\,dx$ (وحدة المساحات)
- إذا كانت إشارة f تتغير على $[a ; b]$، فإن $\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)|\,dx$ (وحدة المساحات)

ملاحظة : في الشكل المقابل،

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$$

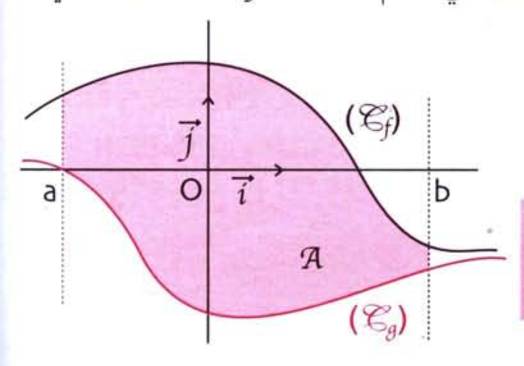
$$\mathcal{A} = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

حساب مساحة محدودة بمنحنيين

f و g دالتان مستمرتان على المجال ؛ a و b عددان من I حيث $a < b$

$(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ المنحنيان الممثلان للدالتين f و g على الترتيب في معلم متعامد $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ للمستوي.

مبرهنة



$\mathcal{A}$ هي المساحة المحدودة بالمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = a$ و $x = b$.

إذا كان من أجل كل عدد x من I ؛ $f(x) \leq g(x)$

فإن $\mathcal{A} = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$ (وحدة المساحات)

ملاحظة : • إذا كان $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$ و $\|\vec{j}\| = 1\text{cm}$

فإن وحدة المساحات هي 1cm^2.

• إذا كان $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$ و $\|\vec{j}\| = 3\text{cm}$ فإن وحدة المساحات هي 6cm^3.

فإن $\mathcal{A} = 5\times6\text{cm}^2 = 30\text{cm}^2$

حساب حجوم

$(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد من الفضاء.$(\mathscr{E})$ جزء من الفضاء محدود بالمستويين ذوي المعادلتين $z = a$ ؛ $z = b$ و $\mathcal{V}$ حجمه.

مبرهنة

t ينتمي إلى المجال $[a ; b]$. ليكن $S(t)$ مساحة السطح الناتج عن تقاطع الجزء $(\mathscr{E})$ مع المستوي ذي المعادلة $z = t$ أي المستوي العمودي على (Oz) في $P(0 ; 0 ; t)$ و الموازي للمستوي (Oxy).

• إذا كانت الدالة S مستمرة على $[a ; b]$ فإن $\mathcal{V} = \int_a^b S(t)\,dt$. (وحدة الحجوم)

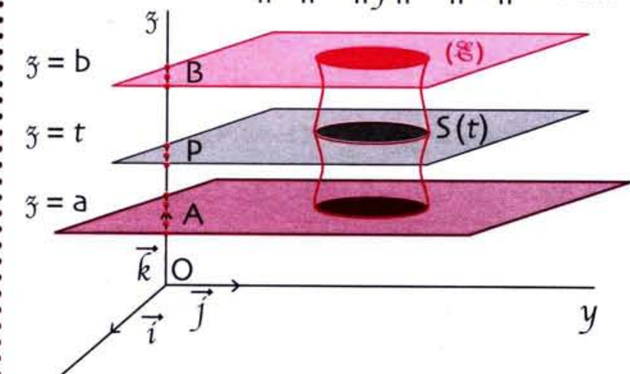
ملاحظة : • إذا كان المعلم متعامدا و متجانسا $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1\text{cm}$

فإن وحدة الحجوم هي 1cm^3.

• إذا كان المعلم متعامدا حيث $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$

و $\|\vec{j}\| = 1\text{cm}$ و $\|\vec{k}\| = 3\text{cm}$

فإن وحدة الحجوم هي 6cm^3.



حجم مجسم دوراني محوره هو محور الفواصل

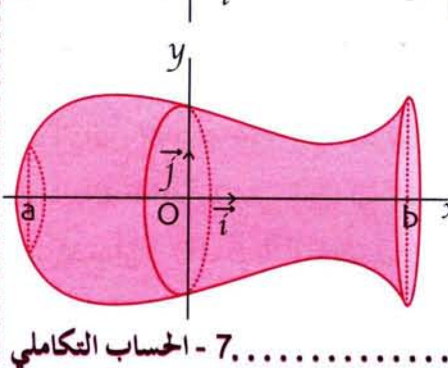
$(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد و متجانس من الفضاء. ليكن $(\mathscr{C}_f)$ المنحني الممثل لدالة f المستمرة على مجال $[a ; b]$ حيث $a < b$ في المستوي ذي المعادلة $z = 0$ (أي المستوي (Oxy)).

مبرهنة

عندما يدور المنحنى حول المحور $(O ; \vec{i})$ فإنه يولد مجسما دورانيا حجمه $v = \int_a^b \pi\left[f(t)\right]^2 dt$ حيث $t \in [a;b]$.

ملاحظة : بتطبيق المبرهنة السابقة و بملاحظة أن مساحة الحيز المستوي المحصل عليها بتقاطع الجزء $(\mathscr{E})$ مع المستوي ذي المعادلة ، $x = t$ ، $t \in [a ; b]$ هي مساحة القرص الذي نصف قطره $\left|f(x)\right|^2$. إذن $S(t) = \pi\left[f(t)\right]^2$

و بالتالي $\mathcal{V} = \int_a^b \pi\left[f(t)\right]^2 dt$.



طرائــق

1 حساب تكامل دالة مستمرة

تمرين

احسب التكاملات التالية :

$\int_{-1}^{4} 3\,dx$ ؛ $\int_{-2}^{2}(4x+5)\,dx$ ؛ $\int_{0}^{1}(x^2-x+1)\,dx$

$\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx$ ؛ $\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx$ ؛ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3\sin x-3\sin x)\,dx$

حل

• حساب التكامل $\int_{-1}^{4} 3\,dx$

الدالة $f : x \longmapsto 3$ ثابتة إذن f معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$.

و بالتالي فهي مستمرة على المجال $[-1 ; 4]$.

الدالة F المعرفة على $[-1 ; 4]$ كما يلي : $F(x) = 3x$ هي دالة أصلية للدالة f على $[-1 ; 4]$.

ينتج أن $\int_{-1}^{4} 3\,dx = F(4) - F(-1) = 3\times4 - 3(-1) = 12 + 3 = 15$

إذن $\int_{-1}^{4} 3\,dx = 15$

• حساب التكامل $\int_{-2}^{2}(4x+5)\,dx$

الدالة $f : x \longmapsto 4x+5$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$. فهي مستمرة على المجال $[-2 ; 2]$.

الدالة F المعرفة على $[-2 ; 2]$ كما يلي : $F(x) = 2x^2 + 5x$ هي دالة أصلية للدالة f على $[-2 ; 2]$

ينتج أن $\int_{-2}^{2}(4x+5)\,dx = F(2) - F(-2) = (2(2)^2 + 5\times2) - (2(-2)^2 + 5(-2))$

$= (8 + 10) - (8 - 10) = 20$

و بالتالي $\int_{-2}^{2}(4x+5)\,dx = 20$

• حساب التكامل $\int_{0}^{1}(x^2-x+1)\,dx$

الدالة $f : x \longmapsto x^2 - x + 1$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$. فهي مستمرة على المجال $[0 ; 1]$.

الدالة F المعرفة على $[0 ; 1]$ كما يلي : $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x$ هي دالة أصلية للدالة f على $[0 ; 1]$

ينتج أن $\int_{0}^{1}(x^2-x+1)\,dx = F(1) - F(0) = \left[\frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{2}(1)^2 + 1\right] - \left[\frac{1}{3}\times0 - \frac{1}{2}\times0 + 0\right]$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{6}$

و بالتالي $\int_{0}^{1}(x^2-x+1)\,dx = \frac{5}{6}$

• حساب التكامل $\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx$

الدالة $f : x \longmapsto \cos x$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$. فهي مستمرة على المجال $[0 ; \pi]$.

الدالة F المعرفة على $[0 ; \pi]$ كما يلي : $F(x) = \sin x$ هي دالة أصلية للدالة f على $[0 ; \pi]$

ينتج أن $\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx = F(\pi) - F(0) = \sin\pi - \sin 0 = 0$

و بالتالي $\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx = 0$

• حساب التكامل $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$

الدالة $f : x \longmapsto \sin x$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$. فهي مستمرة على المجال $[0 ; \pi]$.

الدالة F المعرفة على $[0 ; \pi]$ كما يلي : $F(x) = -\cos x$ هي دالة أصلية للدالة f على $[0 ; \pi]$

ينتج أن $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = F(\pi) - F(0) = -\cos\pi - (-\cos 0) = -1 - (-1) = 0$

و بالتالي $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 0$

• حساب التكامل $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x - 2\sin x) \, dx$

الدالة $f : x \longmapsto 3\cos x - 2\sin x$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$. فهي مستمرة على المجال $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

الدالة F المعرفة على $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ كما يلي : $F(x) = 3\sin x + 2\cos x$ هي دالة أصلية للدالة f على $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

ينتج أن
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x - 2\sin x) \, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \left[3\sin\frac{\pi}{2} + 2\cos\frac{\pi}{2}\right] - \left[3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$= (3\times1 + 2\times0) - (3\times(-1) + 2\times0) = 3 + 3 = 6$$

و بالتالي $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x - 2\sin x) \, dx = 6$

2 استعمال خاصية الخطية لحساب تكامل

تمرين 1

1 • تحقق أن من أجل كل عدد x من $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ ؛ $\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$

2 • احسب $\int_2^3 \frac{2}{x^2 - 1} \, dx$.

حل

1 • من أجل كل عدد x من $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ ؛ $\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} = \frac{(x + 1) - (x - 1)}{(x - 1) - (x + 1)} = \frac{2}{x^2 - 1}$

و بالتالي من أجل كل عدد x من $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ ؛ $\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$

2 • حساب التكامل $\int_2^3 \frac{2}{x^2 - 1} \, dx$

لتكن f الدالة حيث $f : x \longmapsto \frac{2}{x^2 - 1}$

الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ ؛ و مستمرة على كل مجال محتوى في $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$

إذن f مستمرة على المجال $[2 ; 3]$.

و بالتالي فهي تقبل على الأقل دالة أصلية على المجال $[2 ; 3]$.

لدينا $\int_2^3 \frac{2}{x^2 - 1} \, dx = \int_2^3 \left[\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}\right] dx = \int_2^3 \frac{1}{x - 1} \, dx - \int_2^3 \frac{1}{x + 1} \, dx$

(استعمال خاصية الخطية للتكامل)

الدالة F المعرفة على [3 ; 2] كمايلي : $F(x) = \ln(x - 1)$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{1}{x-1}$ على [3 ; 2].

والدالة G المعرفة على [3 ; 2] كما يلي : $G(x) = \ln(x + 1)$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{1}{x+1}$ على [3 ; 2].

لدينا $\int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx = F(3) - F(2) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

$\int_2^3 \frac{1}{x+1}\,dx = G(3) - G(2) = 2\ln 2 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3}$

ينتج أن $\int_2^3 \frac{2}{x^2-1}\,dx = \ln 2 - \ln \frac{4}{3} = \ln \frac{2}{\frac{4}{3}} = \ln \frac{3}{2}$

إذن $\int_2^3 \frac{2}{x^2-1}\,dx = \ln \frac{3}{2}$.

تمرين 2

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ ؛ كما يلي : $f(x) = \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2}$

1 ـ اثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 ؛ $f(x) = 4(x-1) - \frac{1}{(x-1)^2}$

2 ـ احسب $\int_2^4 \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2}\,dx$.

حل

1 ـ من أجل كل عددحقيقي يختلف عن 1 ؛ $4(x-1) - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2}$

$= f(x)$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 ؛ $f(x) = 4(x-1) - \frac{1}{(x-1)^2}$

2 ـ حساب $\int_2^4 \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2}\,dx$.

لدينا الدالة f مستمرة على كل من المجالين]1 ; ∞-[و]∞+ ; 1[.

لأنها دالة ناطقة. و بالتالي الدالة f مستمرة على المجال [4 ; 2].

فهي تقبل دالة أصلية على المجال [4 ; 2].

لدينا $\int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2}\,dx = \int_2^4 \left[4(x-1) - \frac{1}{(x-1)^2}\right]dx$

$= \int_2^4 4(x-1)\,dx + \int_2^4 \frac{-1}{(x-1)^2}\,dx$

الدالة F المعرفة على [4 ; 2] كما يلي : $F(x) = 2x^2 - 4x$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto 4(x-1)$ على [4 ; 2]. الدالة G المعرفة على [4 ; 2] كما يلي : $G(x) = \frac{1}{x-1}$

هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{-1}{(x-1)^2}$ على [4 ; 2].

إذن $\int_2^4 4\,(x-1)\,dx = F(4) - F(2) = [\,2(4)^2 - 4(4)] - [2\times2^2 - 4\times2] = 16$

و $\int_2^4 \frac{-1}{(x-1)^2}\,dx = G(4) - G(2) = \left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{1}\right) = -\frac{2}{3}$

ينتج أن $\int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 4\,(x-1)\,dx + \int_2^4 \frac{-1}{(x-1)^2}\,dx = 16 - \frac{2}{3} = \frac{46}{3}$

إذن $\int_2^4 \frac{4(x-1)^3-1}{(x-1)^2}\,dx = \frac{46}{3}$.

3 استعمال علاقة شال

تمرين 1

1 ـ احسب كلا من التكاملين $\int_0^3 x\,(x^2+1)\,dx$ و $\int_{-3}^0 [-x\,(x^2+1)]\,dx$

2 ـ استنتج حساب التكامل $\int_{-3}^3 |x|\,(x^2+1)\,dx$.

حل

1 ـ لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[-3\,;\,3]$ كما يلي : $f(x) = |x|\,(x^2+1)$

على المجال $[0\,;\,3]$ ؛ $f(x) = x\,(x^2+1)$. و على المجال $[-3\,;\,0]$ ؛ $f(x) = -x\,(x^2+1)$.

الدالة f مستمرة على كل من المجالين $[-3\,;\,0]$ و $[0\,;\,3]$. إذن تقبل على الأقل دالة أصلية على كل من هذين المجالين. الدالة F المعرفة على $[-3\,;\,0]$ كما يلي : $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2$

هي دالة أصلية للدالة f على $[0\,;\,3]$. و الدالة G المعرفة على $[-3\,;\,0]$ كما يلي :

$G(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ هي دالة أصلية f على $[-3\,;\,0]$.

ينتج أن $\int_0^3 x\,(x^2+1)\,dx = F(3) - F(0) = \frac{99}{4}$ و $\int_{-3}^0 [-x\,(x^2+1)]\,dx = \frac{99}{4}$

2 ـ $\int_{-3}^3 |x|\,(x^2+1)\,dx = \int_{-3}^0 -x\,(x^2+1)\,dx + \int_0^3 x\,(x^2+1)\,dx = \frac{99}{4} + \frac{99}{4} = \frac{99}{2}$

أي $\int_{-3}^3 |x|\,(x^2+1)\,dx = \frac{99}{2}$.

تمرين 2

احسب التكامل $\int_{-1}^1 |e^x - 1|\,dx$.

حل

لتكن f الدالة المعرفة على $[-1\,;\,1]$ كما يلي: $f(x) = |e^x - 1|$

من أجل كل عدد x من المجال $[-1\,;\,0]$ ؛ $f(x) = -(e^x - 1)$

و من أجل كل عدد x من المجال $[0\,;\,1]$ ؛ $f(x) = e^x - 1$

الدالة f مستمرة على كل من المجالين $[-1\,;\,0]$ و $[0\,;\,1]$. إذن تقبل دالة أصلية على الأقل على كل هذين المجالين.

الدالة F حيث $F(x) = -e^x + x$ هي دالة أصلية للدالة f على $[-1\,;\,0]$.

و الدالة G حيث $G(x) = e^x - x$ هي دالة أصلية للدالة f على $[0 ; 1]$.

ينتج أن $\int_{-1}^{1} |e^x - 1|\, dx = \int_{-1}^{0} -(e^x - 1)\, dx + \int_{0}^{1} (e^x - 1)\, dx$

$= [F(0) - F(-1)] + [G(1) - G(0)] = \frac{1}{e} + e - 2$

إذن $\int_{-1}^{1} |e^x - 1|\, dx = \frac{1}{e} + e - 2$.

4 استعمال إيجابية التكامل

تمرين

1 . اثبت أن $\int_{0}^{\pi} (x + 1 - \sin x)\, dx \geq 0$

2 . تحقق من ذلك بحساب هذا التكامل.

حل

1 . نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0 ; \pi]$ كما يلي : $f(x) = x + 1 - \sin x$

لدينا من أجل كل عدد x من المجال $[0 ; \pi]$ ؛ $0 \leq \sin x \leq 1$.

إذن من أجل كل عدد x من المجال $[0 ; \pi]$ ؛ $0 \leq 1 - \sin x$

ينتج أن من أجل كل عدد x من $[0 ; \pi]$ ؛ $x + 1 - \sin x \geq 0$

بما أن الدالة f مستمرة على المجال $[0 ; \pi]$ فإنها تقبل على الأقل دالة أصلية على $[0 ; \pi]$.

و بما أن من أجل كل عدد x من $[0 ; \pi]$ ؛ $x + 1 - \sin x \geq 0$ فإن $\int_{0}^{\pi} (x + 1 - \sin x)\, dx \geq 0$.

2 . التحقق من صحة هذه النتيجة حسابيا .

لدينا الدالة F المعرفة على $[0 ; \pi]$ كما يلي : $F(x) = \frac{1}{2} x^2 + x + \cos x$ هي دالة أصلية للدالة f على $[0 ; \pi]$.

إذن $\int_{0}^{\pi} (x + 1 - \sin x)\, dx = F(\pi) - F(0) = \left(\frac{1}{2}\pi^2 + \pi + \cos\pi \right) - \left(\frac{1}{2}\times 0 + 0 + \cos 0 \right)$

إذن $= \frac{1}{2}\pi^2 + \pi - 1 - 1 = \frac{1}{2}\pi^2 + \pi - 2$

و بالتالي $\int_{0}^{\pi} (x + 1 - \sin x)\, dx = \frac{1}{2}\pi^2 + \pi - 2$.

و بما أن $\pi - 2 > 0$ فإن $\frac{1}{2}\pi^2 + \pi - 2 > 0$. ينتج أن $\int_{0}^{\pi} (x + 1 - \sin x)\, dx > 0$

أي أن $\int_{0}^{\pi} (x + 1 - \sin x)\, dx \geq 0$.

ملاحظة : إذا تحقق الشرط $f(x) \geq 0$ على المجال $[a ; b]$ فإنه يضمن إيجابية التكامل أي $\int_{a}^{b} f(x)\, dx \geq 0$ و العكس غير صحيح يمكن أن يكون $\int_{a}^{b} (x + 1 - \sin x)\, dx > 0$ دون تحقق الشرط $f(x) \geq 0$ على كل المجال $[a ; b]$.

لاحظ المثال المضاد: $\int_{-2}^{4} (-x + 2)\, dx$. الدالة $x \longmapsto -x + 2$ ليست دوما موجبة على $[-2 ; 4]$ و $\int_{-2}^{4} (-x + 2)\, dx = 6$.

5 استعمال متباينة المتوسط

تمرين 1

ليكن التكامل I التالي : $I = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{t}{1+t}\right)dt$ برهن أن $\frac{1}{8} \le I \le \frac{1}{3}$، بدون حساب التكامل I.

حل

من أجل كل عدد t من المجال $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ ، $\frac{3}{2} \le 1 + t \le 2$ و بالتالي من أجل كل عدد t من $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ ، $\frac{1}{2} \le \frac{1}{1+t} \le \frac{2}{3}$.

و بما أن $\frac{1}{2} \le t \le 1$ إذن $\frac{1}{4} \le \frac{t}{1+t} \le \frac{2}{3}$

و بالتالي $\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \le \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{t}{1+t}\right)dt \le \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$ (متباينة المتوسط).

أي أن $\frac{1}{8} \le \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{t}{1+t}\right)dt \le \frac{1}{3}$. و بالتالي $\frac{1}{8} \le I \le \frac{1}{3}$.

تمرين 2

a و b عددان حقيقيان ينتميان إلى المجال $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ حيث $a < b$.

1. برهن أن من أجل كل عدد x من المجال $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ ؛ $\frac{1}{cos^2 a} \le \frac{1}{cos^2 x} \le \frac{1}{cos^2 b}$
2. استنتج أن $\frac{b-a}{cos^2 a} \le tan\, b - tan\, a \le \frac{b-a}{cos^2 b}$

حل

1. بفرض $a \le x \le b$، ينتج أن $cosa \ge cosx \ge cosb$ لأن الدالة cos متناقصة على المجال $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x من أجل $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ ؛ $\frac{1}{cosa} \le \frac{1}{cosx} \le \frac{1}{cosb}$

لأن $cosa > 0$ و $cosb > 0$ و $cosx > 0$.

ينتج أن من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ ؛ $\frac{1}{cos^2 a} \le \frac{1}{cos^2 x} \le \frac{1}{cos^2 b}$

2. بما أن من أجل كل عدد x من المجال $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ ؛ $\frac{1}{cos^2 a} \le \frac{1}{cos^2 x} \le \frac{1}{cos^2 b}$

فإن $\frac{1}{cos^2 a}(b-a) \le \int_a^b \frac{1}{cos^2 x}dx \le \frac{1}{cos^2 b}(b-a)$ (متباينة المتوسط)

أي أن $\frac{b-a}{cos^2 a} \le \left[tanx\right]_a^b \le \frac{b-a}{cos^2 b}$.

لأن الدالة $x \longmapsto tanx$ دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{1}{cos^2 x}$ على المجال $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

و بالتالي $\frac{b-a}{cos^2 a} \le tan\, b - tan\, a \le \frac{b-a}{cos^2 b}$.

6 حساب القيمة المتوسطة لدالة

تمرين 1

f هي الدالة المعرفة على المجال $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$ كما يلي : $f(x)=\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$

احسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$.

حل

• الدالة f مستمرة على المجال $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$. فهي تقبل على الأقل دالة أصلية على $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$.

الدالة F المعرفة كما يلي : $F(x)=\frac{1}{3}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$ هي دالة أصلية للدالة f على $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$.

القيمة المتوسطة للدالة f على $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$ هي $\frac{1}{\frac{\pi}{6}-0}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)dx$

لدينا $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)dx=F\left(\frac{\pi}{6}\right)-F(0)=\frac{1}{3}\sin\left(3\times\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{3}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

إذن $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)dx=\frac{\sqrt{2}}{3}$ و بالتالي $\frac{1}{\frac{\pi}{6}-0}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)dx=\frac{6}{\pi}\times\frac{\sqrt{2}}{3}$

ينتج أن القيمة المتوسطة للدالة f حيث $f(x)=\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$ على المجال $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$ هي $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

7 استعمال المكاملة بالتجزئة

تمرين

احسب التكاملات التالية باستعمال المكاملة بالتجزئة.

$\int_0^{\pi}(2x+3)\sin x\,dx$ ؛ $\int_0^{1}(2-t)\,e^t\,dt$ ؛ $\int_1^{e}x\ln x\,dx$ ؛ $\int_1^{x}\ln t\,dt$ (حيث $x>1$)

حل

• حساب التكامل $\int_0^{\pi}(2x+3)\sin x\,dx$

نضع $v(x)=2x+3$ و $u'(x)=\sin x$. إذن $v'(x)=2$ و $u(x)=-\cos x$ (لأن الدالة v قابلة للاشتقاق على $[0\,;\pi]$ و الدالة u' مستمرة على $[0\,;\pi]$).

و بالتالي $\int_0^{\pi}(2x+3)\sin x\,dx=\left[-(2x+3)\cos x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-2\cos x)\,dx$

$=2\pi+6+2\int_0^{\pi}\cos x\,dx=2\pi+6+2\left[\sin x\right]_0^{\pi}$

$=2\pi+6+2\times0=2\pi+6$

إذن $\int_0^{\pi}(2x+3)\sin x\,dx=2\pi+6$

• حساب التكامل $\int_0^{1}(2-t)\,e^t\,dt$

نضع $u(t)=2-t$ و $v'(t)=e^t$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $[0\,;1]$ و الدالة v' مستمرة على $[0\,;1]$. إذن $u'(t)=-1$ و $v(t)=e^t$.

ينتج أن $\int_0^1 (2+t)\,e^t\,dt = \left[(2-t)\,e^t\right]_0^1 - \int_0^1 (-e^t)\,dt = (-3e+2) + \int_0^1 e^t\,dt$

$= e - 2 + \left[e^t\right]_0^1 = 2e - 3$

و بالتالي $\int_0^1 (2-t)\,e^t\,dt = 2e - 3$

. حساب التكامل $\int_1^e x\,\ln x\,dx$

نضع $u'(x) = x$ و $v(x) = \ln x$. الدالة u' مستمرة على $[1 ; e]$

و الدالة v قابلة للاشتقاق على $[1 ; e]$. إذن $u(x) = \frac{1}{2}x^2$ و $v'(x) = \frac{1}{x}$.

ينتج أن $\int_1^e x\ln x\,dt = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\times\frac{1}{2}x^2\,dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{1}{2}x\,dx$

ينتج أن $= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$

و بالتالي $\int_1^e x\ln x\,dt = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$

. حساب التكامل $\int_1^x \ln t\,dt$ حيث $x > 1$.

نضع $u'(x) = 1$ و $v(t) = \ln t$. الدالة u' مستمرة على $[1 ; x]$

و الدالة v قابلة للاشتقاق على $[1 ; x]$. إذن $u(x) = t$ و $v'(x) = \frac{1}{t}$.

و بالتالي $\int_1^x \ln t\,dt = \left[t\ln t\right]_1^x - \int_1^x t\times\frac{1}{t}\,dt = x\ln x - \int_1^x 1\,dt$

$= x\ln x - [t]_1^x = x\ln x - x + 1$

ينتج أن $\int_1^x \ln t\,dt = x\ln x - x + 1$

8 تعيين الدالة الأصلية لدالة ، تنعدم عند عدد حقيقي معلوم

تمرين

f هي الدالة المعرفة على $]0 ; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{x}\,\ln x$

عين الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم عند العدد 1.

حل

الدالة f معرفة و مستمرة على $]0 ; +\infty[$. إذن f تقبل على الأقل دالة أصلية على $]0 ; +\infty[$.

الدالة الأصلية للدالة f على $]0 ; +\infty[$ و التي تنعدم عند العدد 1 هي الدالة F المعرفة

كما يلي : $F(x) = \int_1^x \sqrt{t}\,\ln t\,dt$

حساب التكامل $\int_1^x \sqrt{t}\,\ln t\,dt$ باستعمال المكاملة بالتجزئة.

نضع $u'(t) = \sqrt{t}$ و $v(t) = \ln t$. الدالة u' مستمرة على $]0 ; +\infty[$ و الدالة v قابلة للاشتقاق

على $]0 ; +\infty[$. إذن $u(t) = \frac{2}{3}t\sqrt{t}$ و $v'(t) = \frac{1}{t}$.

ينتج أن $\int_1^x \sqrt{t}\,\ln t\,dt = \left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{2}{3}\sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_1^x$

$= \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + \frac{4}{9}$

ينتج أن الدالة الأصلية f التي تنعدم عند العدد 1 هي الدالة F المعرفة على $]0\ ;+\infty[$

كما يلي : $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\,\ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + \frac{4}{9}$.

9 حساب مساحة حيز من المستوي

تمرين

احسب المساحة $\mathcal{A}$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f المعرفة كما يلي :

$f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = \ln 2$ و $x = \lambda$ حيث $\lambda > \ln 2$.

حل

الدالة f موجبة على المجال $[\ln 2\ ;\lambda]$.

إذن المساحة هي العدد الموجب $\mathcal{A}$ حيث $\mathcal{A} = \int_{\ln 2}^{\lambda} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$.

بوضع $u(x) = e^x + 1$. الدالة u معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[\ln 2\ ;\lambda]$ و $u'(x) = e^x$.

إذن $f(x)$ يكتب على الشكل : $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

f تقبل دالة أصلية على $[\ln 2\ ;\lambda]$ هي الدالة F المعرفة على المجال $[\ln 2\ ;\lambda]$

كما يلي : $F(x) = \ln[u(x)]$. أي من أجل كل عدد x من $[\ln 2\ ;\lambda]$ ؛ $F(x) = \ln(e^x+1)$.

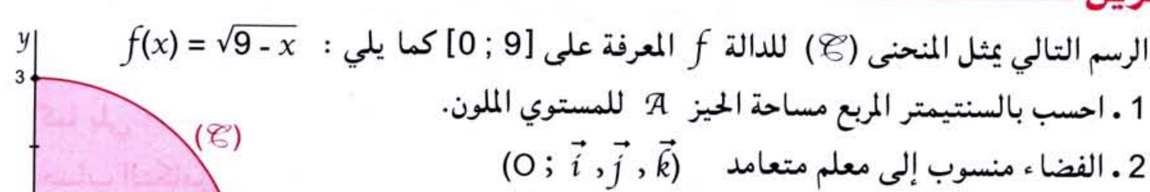
ينتج أن $\mathcal{A} = \int_{\ln 2}^{\lambda} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = F(\lambda) - F(\ln 2) = \ln(e^{\lambda}+1) - \ln(e^{\ln 2}+1)$

$$= \ln(e^{\lambda}+1) - \ln 3 = \ln\left(\frac{e^{\lambda}+1}{3}\right)$$

و بالتالي $\mathcal{A} = \ln\left(\frac{e^{\lambda}+1}{3}\right)$

10 حساب حجم حيز من الفضاء

تمرين



الرسم التالي يمثل المنحنى $(\mathcal{C})$ للدالة f المعرفة على $[0\ ;9]$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{9-x}$

1 ـ احسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيز $\mathcal{A}$ للمستوي الملون.

2 ـ الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $(O\ ;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

عندما يدور المنحنى $(\mathcal{C})$ حول محور الفواصل، يولد مجسما S_1 حجمه $\mathcal{V}_1$

و عندما يدور حول محور التراتيب يولد مجسما S_2 حجمه $\mathcal{V}_2$.

• احسب الحجم $\mathcal{V}_1$ حيث $\|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1\text{cm}$ و $\|\vec{i}\| = \frac{1}{3}\text{ cm}$.

• احسب الحجم $\mathcal{V}_2$ حيث $\|\vec{j}\| = 1\text{cm}$ و $\|\vec{i}\| = \|\vec{k}\| = \frac{1}{3}\text{ cm}$.

حل

1. حساب مساحة الحيز $\mathcal{A}$.

الحيز $\mathcal{A}$ هو الجزء المحدود بالمنحنى $(\mathcal{C})$ و بمحور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 0$ و $x = 9$.

و بما أن الدالة f موجبة على المجال $[0 ; 9]$ فإن $\mathcal{A} = \int_0^9 f(x)\,dx$.

حساب $\int_0^9 f(x)\,dx$.

لدينا من أجل كل عدد x من المجال $[0 ; 9]$ ؛ $f(x) = (9 - x)^{\frac{1}{2}}$

الدالة F حيث $F(x) = -\frac{2}{3}(9 - x)^{\frac{3}{2}}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال $[0 ; 9]$

و بالتالي $\mathcal{A} = \int_0^9 f(x)\,dx = F(9) - F(0) = -\frac{2}{3}(9-9)\sqrt{9-9} + \frac{2}{3}(9-0)\sqrt{9-0} = 18$

أي $\mathcal{A} = 18$ (وحدة المساحات).

وحدة المساحات هي $\frac{1}{3}\text{ cm}^2$ ينتج أن $\mathcal{A} = 6\text{cm}^2$.

2. حساب الحجم $\mathcal{V}_1$.

لدينا
$$\mathcal{V}_1 = \int_0^9 S(t)\,dt$$
$$= \int_0^9 \pi\left[f(t)\right]^2 dt = \left[\pi\left(9t - \frac{1}{2}t^2\right)\right]_0^9$$
$$= \pi\left(81 - \frac{81}{2}\right) - \pi\times 0 = \frac{81}{2}\pi$$

وحدة الحجوم هي $\frac{1}{3}\text{ cm}^3$.

و بالتالي $\mathcal{V}_1 = \frac{27}{2}\pi\text{ cm}^3$ أي $\mathcal{V}_1 \approx 42,412\text{ cm}^3$.

حساب الحجم $\mathcal{V}_2$.

لدينا
$$\mathcal{V}_2 = \int_0^3 S(t)\,dt$$
$$= \int_0^3 9\pi^2\,dt = \left[\left(9\pi^2 t\right)\right]_0^3$$
$$= 9\pi^2\times 3 = 27\pi^2$$

وحدة الحجوم هي $\frac{1}{3}\text{ cm}^3$.

إذن $\mathcal{V}_2 = 2\pi^2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 1\text{ cm}^3 = 3\pi^2\text{ cm}^3$

و بالتالي $\mathcal{V}_2 \approx 29,609\text{ cm}^3$.

تمارين و حلول نموذجية

تمرين 1

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x) = x + \ln|x| + e^{-x}$ و $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة 1cm)

1. ادرس تغيرات الدالة f.
2. ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.
3. أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2 حيث $-\frac{1}{2} < x_2 < -\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4} < x_1 < \frac{1}{2}$
4. عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة A فاصلتها 1.
5. ارسم $(\mathscr{C}_f)$.
6. (D) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$ و λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1.

احسب المساحة $\mathcal{A}(\lambda)$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$، و المستقيم (D) و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 1$ و $x = \lambda$.

احسب $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$. يعطي $\ln 2 \approx 0,69$ ؛ $e^{\frac{1}{2}} \approx 1,65$.

حل

1. دراسة تغيرات الدالة f.

- f معرفة على $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$. (أي على $\mathbb{R}^*$).
- f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty ; 0[$ و $]0 ; +\infty[$

و من أجل كل عدد x يختلف عن 0 ؛ $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - e^{-x}$

- دراسة إشارة $f'(x)$ على كل من المجالين $]-\infty ; 0[$ و $]0 ; +\infty[$.

إذا كان $x < 0$ فإن $-x > 0$ و بالتالي $e^{-x} > 1$.

بما أن $1 + \frac{1}{x} < 1$ فإن $1 + \frac{1}{x} - e^{-x} < 0$ أي على المجال $]-\infty ; 0[$ ؛ $f'(x) < 0$

و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty ; 0[$.

إذا كان $x > 0$ فإن $-x < 0$ و بالتالي $e^{-x} < 1$.

بما أن $1 + \frac{1}{x} > 1$ فإن $1 + \frac{1}{x} - e^{-x} > 0$ أي $f'(x) > 0$ على المجال $]0 ; +\infty[$

و بالتالي الدالة f متنزايدة على المجال $]0 ; +\infty[$.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$ أي $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln|x| = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$. إذن توجد حالة عدم التعيين.

لدينا من أجل $x < 0$ ؛ $f(x) = x + \ln(-x) + e^{-x} = -x\left(-1 + \frac{\ln(-x)}{-x} + \frac{e^{-x}}{-x}\right)$

عندما $x \longrightarrow -\infty$ فإن $-x \longrightarrow +\infty$ و بالتالي $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(-x)}{-x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$.

ينتج أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x\left(-1+\frac{\ln(-x)}{-x}+\frac{e^{-x}}{-x}\right)\right]=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

من أجل $x>0$ لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$.

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\ln x+e^{-x})=+\infty$. بالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

• جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

2. $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$ إذن المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (أي محور التراتيب) مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\ln|x|}{x}+\frac{e^{-x}}{x}\right)=-\infty$ إذن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل فرع قطع مكافئ منحاه محور التراتيب. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=+\infty$

إذن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل فرع قطع مكافئ منحاه المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

تحديد الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم ذي المعادلة $y=x$ بجوار $+\infty$.

لدينا من أجل كل عدد x أكبر تماما من 1 ؛ $\ln x+e^{-x}>0$ أي $f(x)-x>0$

و بالتالي $(\mathscr{C}_f)$ يقع فوق المستقيم ذي المعادلة $y=x$ على المجال $]1\,;+\infty[$.

3. الدالة f معرفة و مستمرة و متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$ و $f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

إذن المعادلة تقبل حلا وحيدا x_1 حيث $\frac{1}{4}<x_1<\frac{1}{2}$.

$\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\approx 0{,}413\right.$ و $f\left(\frac{1}{4}\right)\approx -0{,}357$ (إستعمال حاسبة)$\left.\right)$

و بالتالي $(\mathscr{C}_f)$ يقطع محور الفواصل في النقطة فاصلتها x_1 حيث $\frac{1}{4}<x_1<\frac{1}{2}$.

لدينا كذلك ؛ f معرفة و مستمرة و متناقصة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right]$.

$f\left(-\frac{1}{2}\right)\approx 0{,}456$ و $f\left(-\frac{1}{4}\right)\approx -0{,}358$. (باستعمال حاسبة)

و $f\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot f\left(-\frac{1}{2}\right)<0$. إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_2 حيث $-\frac{1}{2}<x_2<-\frac{1}{4}$.

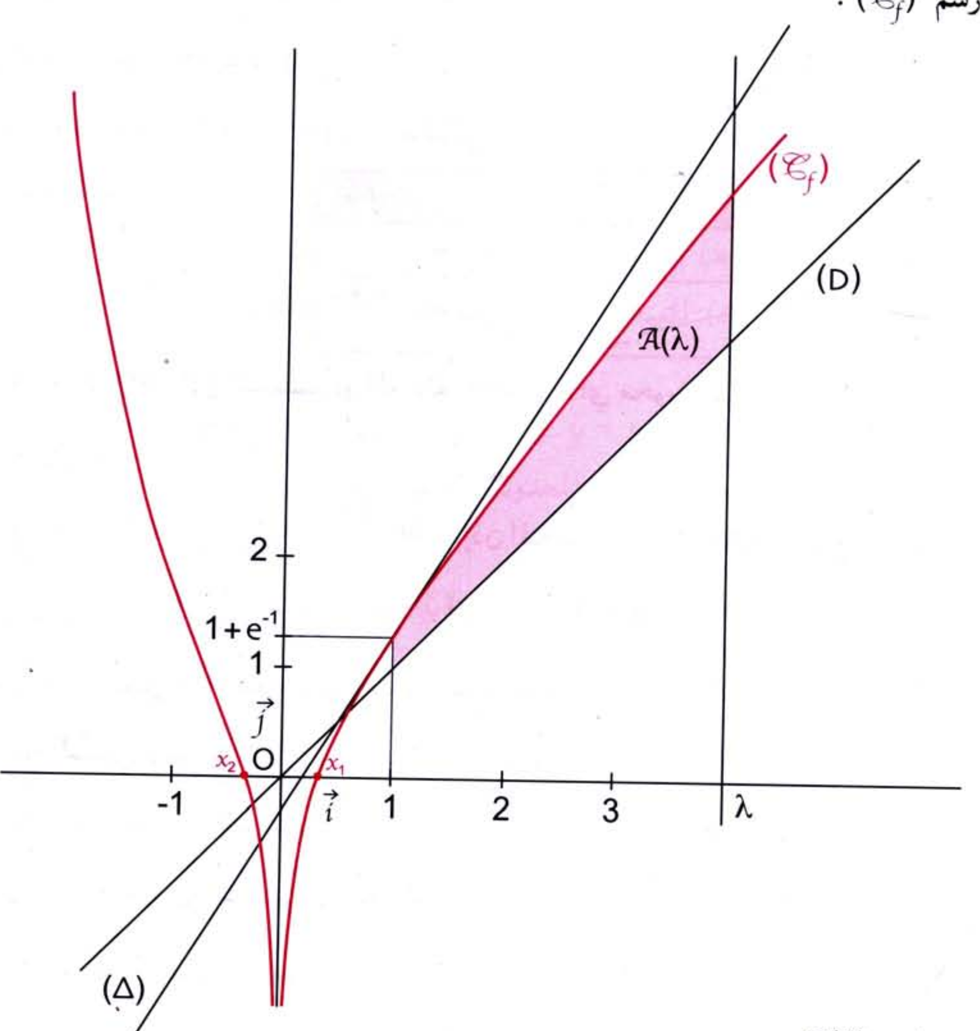
ينتج أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها x_2 حيث $-\frac{1}{2}<x_2<-\frac{1}{4}$

4. معادلة المماس (Δ) عند النقطة A التي فاصلتها 1.

لدينا $f(1)=1+\frac{1}{e}$ ؛ $f'(1)=2-\frac{1}{e}$.

معادلة (Δ) هي $y=\left(2-\frac{1}{e}\right)x-1+\frac{2}{e}$.

5. رسم $(\mathscr{C}_f)$.



6. حساب $\mathcal{A}(\lambda)$

على المجال $[1 ; +\infty[$ ؛ $f(x) - x > 0$ (لأن $\ln x \geq 0$ و $e^{-x} > 0$).

إذن $\mathcal{A}(\lambda) = \int_1^{\lambda}[f(x) - x]\,dx = \int_1^{\lambda}(\ln x + e^{-x})\,dx$

$$= \int_1^{\lambda}\ln x\,dx + \int_1^{\lambda}e^{-x}\,dx = \left[x\ln x - x\right]_1^{\lambda} + \left[-e^{-x}\right]_1^{\lambda}$$

$$= \lambda\ln\lambda - \lambda - e^{-\lambda} + 1 + \frac{1}{e} = \lambda\left[\ln\lambda - 1 - \frac{1}{\lambda e^{\lambda}} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda e}\right]$$

إذن $\mathcal{A}(\lambda) = \left(\lambda\ln\lambda - \lambda - e^{-\lambda} + 1 + \frac{1}{e}\right)\text{cm}^2$

• حساب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda)$.

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\left[\ln\lambda - 1 - \frac{1}{\lambda e^{\lambda}} + \frac{1}{\lambda e} + \frac{1}{\lambda}\right] = +\infty$$

إذن $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda) = +\infty$.

تمرين 2

g هي الدالة المعرفة بـ $g(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

$(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة g في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1 • عين مجموعة التعريف D للدالة g.

2 • اثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x من D، $g(x) = x + 2 + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

3 • ادرس تغيرات الدالة g.

4 • ادرس الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathscr{C})$.

• حدد الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم المقارب المائل (Δ).

5 • ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$ في المعلم السابق.

6 • a عدد حقيقي أكبر تماما من 4.

• احسب المساحة $S(a)$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$ المستقيم المقارب (Δ) و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 4$ و $x = a$.

ما هي نهاية هذه المساحة لما يؤول a إلى $+\infty$ ؟

حل

1 • $D = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

2 • من أجل كل عدد x يختلف عن 1 ؛ $x + 2 + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{(x+2)(x-1)^2 + 3(x-1) + 1}{(x-1)^2}$

$$= \frac{x^3}{(x-1)^2} = g(x)$$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x من D ؛ $g(x) = x + 2 + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

3 • $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} g(x) = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} g(x) = +\infty$

الدالة g قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty ; 1[$ و $]1 ; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x من D ؛ $g'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$.

إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R} - \{0\}$ ملخصة في الجدول التالي

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	+	||	-	0	+	

جدول تغيرات الدالة يكون كالآتي :

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$+\infty$	$\|$	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

• 4 $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = +\infty$ إذن المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$.

من أجل كل عدد حقيقي x من D ؛ $g(x) - (x + 2) = \frac{3}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}$.

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) - (x + 2)] = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} [g(x) - (x + 2)] = 0$.

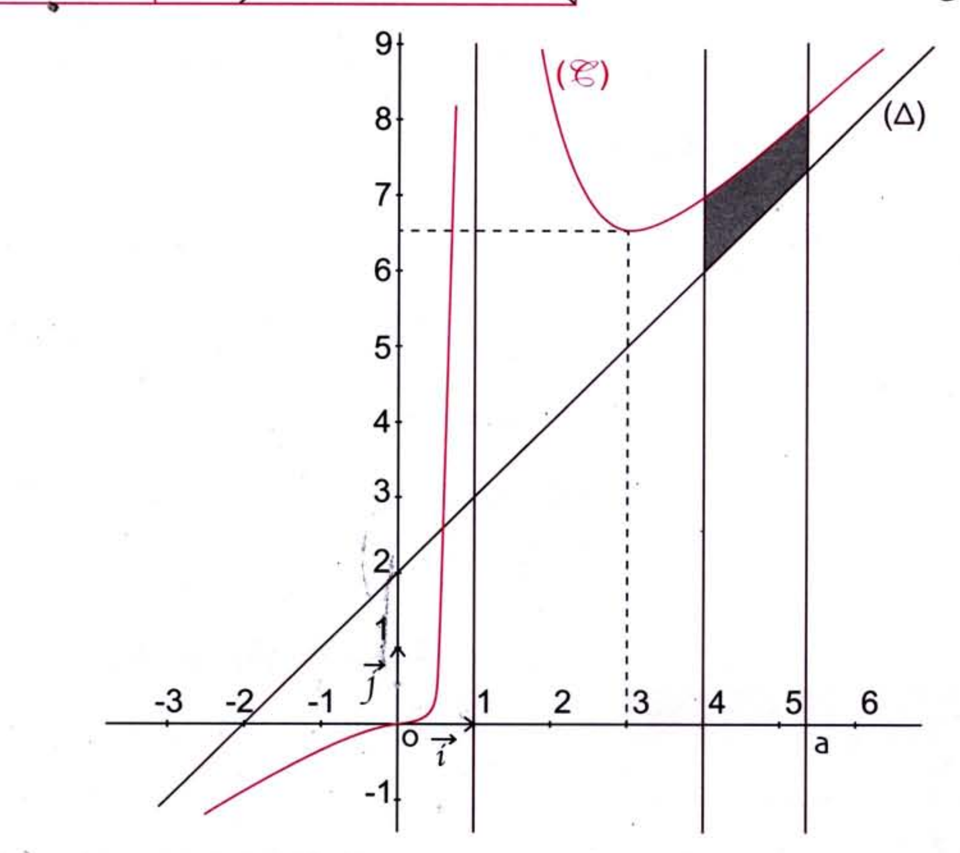
بالتالي المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 2$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من D ؛ $g(x) - (x + 2) = \frac{3x - 2}{(x - 1)^2}$.

إشارة العبارة $g(x) - (x + 2)$ و الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (Δ) ملخصة في الجدول المقابل

x	$-\infty$	1		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$g(x) - (x + 2)$	$-$	$\|$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	$(\mathscr{C})$ تحت (Δ)			$(\mathscr{C})$ يقطع (Δ)	$(\mathscr{C})$ فوق (Δ)

• 5 رسم المنحنى $(\mathscr{C})$.



6• حساب المساحة $S(a)$.

لدينا $g(x)-(x+2)>0$ على المجال $]4\,;+\infty[$.

إذن $S(a)=\int_4^a [g(x)-(x+2)]\,dx$.

$$=\int_4^a\left[\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right]dx=\left[3\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}\right]_4^a$$

$$=3\ln\left(\frac{a-1}{3}\right)-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{3}$$

إذن $S(a)=3\ln\left(\frac{a-1}{3}\right)-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{3}$.

لدينا $\lim\limits_{a\to+\infty}3\ln\left(\frac{a-1}{3}\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{a\to+\infty}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ إذن $\lim\limits_{a\to+\infty}S(a)=+\infty$.

مسألة

الجزء الأول

g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2e^x+2x-7$

1• عين نهايتي g عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2• ادرس اتجاه تغير الدالة g و انجز جدول تغيراتها.

3• بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\frac{1}{2}<\alpha<1$.

4• ادرس إشارة g على $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $f(x)=(2x-5)(1-e^{-x})$

$(\mathscr{C})$ هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i},\vec{j})$.

1• ادرس إشارة f على $\mathbb{R}$.

2• عين نهايتي f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

3• احسب $f'(x)$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f. تحقق أن $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة.

4• استنتج إتجاه تغير الدالة f و انجز جدول تغيراتها.

5• أ) برهن أن $f(\alpha)=\frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$.

ب) ادرس إتجاه تغير الدالة h المعرفة على المجال $\left]-\infty\,;\frac{5}{2}\right[$ كما يلي $h(x)=\frac{(2x-5)^2}{2x-7}$.

جـ) إنطلاقا من حصر العدد α المحصل عليه في الجزء الأول ، أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

د) برهن أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y=2x-5$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

حدد الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (D).

6 • ارسم المستقيم (D) و المنحنى $(\mathscr{C})$ في المعلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة 2cm).

7 • λ عدد حقيقي أكبر تماما من $\frac{5}{2}$.

عين المساحة $\mathcal{A}(\lambda)$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$، محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 0$ و $x = \lambda$. احسب نهاية $\mathcal{A}(\lambda)$ لما يؤول λ إلى $+\infty$.

حل

الجزء الأول

الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ و $g(x) = 2e^x + 2x - 7$.

1 • حساب $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

لدينا $\lim_{x \to -\infty} 2e^x = 0$ و $\lim_{x \to -\infty} (2x - 7) = -\infty$ إذن $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

و لدينا أيضا $\lim_{x \to +\infty} 2e^x = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} (2x - 7) = +\infty$ إذن $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

2 • الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ (لأنها مجموع دوال قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$)

و من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $g'(x) = 2e^x + 2$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $e^x > 0$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $2e^x + 2 > 0$

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $g'(x) > 0$

إذن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة يكون كالآتي

x	$-\infty$ $+\infty$
$g'(x)$	+
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

3 • الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ إذن g مستمرة على المجال $[0 ; 1]$.

الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ إذن g متزايدة تماما على المجال $[0 ; 1]$.

لدينا $g\left(\frac{1}{2}\right) = -2{,}7$ و $g(1) = 2e + 2 - 7$ أي $g(1) \approx 0{,}44$ إذن $g(1) \cdot g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

بما أن g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ و $g(1) \cdot g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا واحدا α حيث $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

4 • دراسة إشارة g على $\mathbb{R}$.

إشارة $g(x)$ ملخصة في الجدول التالي

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

الجزء الثاني

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$.

1 • دراسة إشارة f على $\mathbb{R}$.

إشارة f ملخصة في الجدول التالي

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x - 5$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$1 - e^{-x}$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2 • تعيين $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - e^{-x}) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x - 5) = -\infty$ إذن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

و لدينا أيضا $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 5) = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

3 • من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = 2 + (2x - 7)e^{-x}$

نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = \dfrac{2e^{x} + 2x - 7}{e^{x}}$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = \dfrac{g(x)}{e^{x}}$

بما أن $e^{x} > 0$ على $\mathbb{R}$ فإن $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة.

إشارة $f'(x)$ ملخصة في الجدول التالي

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

4 • من جدول إشارة $f'(x)$ ينتج أن

الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty ; \alpha]$ و متزايدة على المجال $[\alpha ; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f يكون كالآتي

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

لدينا $f(\alpha) = (2\alpha - 5)(1 - e^{-\alpha})$

5 • أ) البرهان على أن $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$.

نعلم أن $g(\alpha) = 0$ أي $2e^{\alpha} + 2\alpha - 7 = 0$ و منه $e^{\alpha} = \frac{7}{2} - \alpha$

لدينا $f(\alpha) = (2\alpha - 5)(1 - e^{-\alpha})$ أو $f(\alpha) = (2\alpha - 5)\left(1 - \frac{1}{e^{\alpha}}\right)$

و بالتالي $f(\alpha) = (2\alpha - 5)\left(1 - \dfrac{1}{\frac{7}{2} - \alpha}\right)$ بعد التبسيط ينتج أن $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$.

ب) دراسة إتجاه تغير الدالة h على المجال $\left]-\infty ; \frac{5}{2}\right]$.

لدينا $h(x) = \frac{(2x-5)^2}{2x-7}$

الدالة h قابلة للإشتقاق على المجال $\left]-\infty ; \frac{5}{2}\right]$.

و من أجل كل عدد x من $\left]-\infty ; \frac{5}{2}\right]$ ؛ $h'(x) = \frac{(2x-5)(4x-18)}{(2x-7)^2}$

إشارة $h'(x)$ على $\mathbb{R} - \left\{\frac{7}{2}\right\}$ ملخصة في الجدول المقابل

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$\frac{7}{2}$		$\frac{9}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	

ينتج أن $h'(x) \geq 0$

على المجال $\left]-\infty ; \frac{5}{2}\right]$ و بالتالي الدالة h متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty ; \frac{5}{2}\right]$.

جـ) حصر $f(\alpha)$. نعلم أن $f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$

لدينا $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ و $f(\alpha) = h(\alpha)$.

الدالة h متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty ; \frac{5}{2}\right]$ و α ينتمي إلى هذا المجال

إذن $h(0) < h(\alpha) < h\left(\frac{1}{2}\right)$ حيث $h(0) = -\frac{25}{7}$ و $h\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{3}$

بما أن $f(\alpha) = h(\alpha)$ و $-\frac{25}{7} < h(\alpha) < -\frac{8}{3}$

إذن $-\frac{25}{7} < f(\alpha) < -\frac{8}{3}$ أو $-3{,}57 < f(\alpha) < -2{,}67$.

د) لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (2x-5)] = \lim_{x \to +\infty} [-(2x-5)e^{-x}] = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{2x-5}{-e^{x}}\right)\right] = 0$$

ينتج أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x - 5$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

تحديد الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (D).

لذلك ندرس إشارة $f(x) - (2x-5)$. لدينا $f(x) - (2x-5) = -\frac{2x-5}{e^{x}}$

إشارة $f(x) - (2x-5)$ ملخصة في الجدول المقابل.

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x-5$		-	0	+	
$f(x) - (2x-5)$		+	0	-	

من الجدول السابق ينتج أن

$(\mathscr{C})$ تحت (D) على المجال $\left]\frac{5}{2} ; +\infty\right[$.

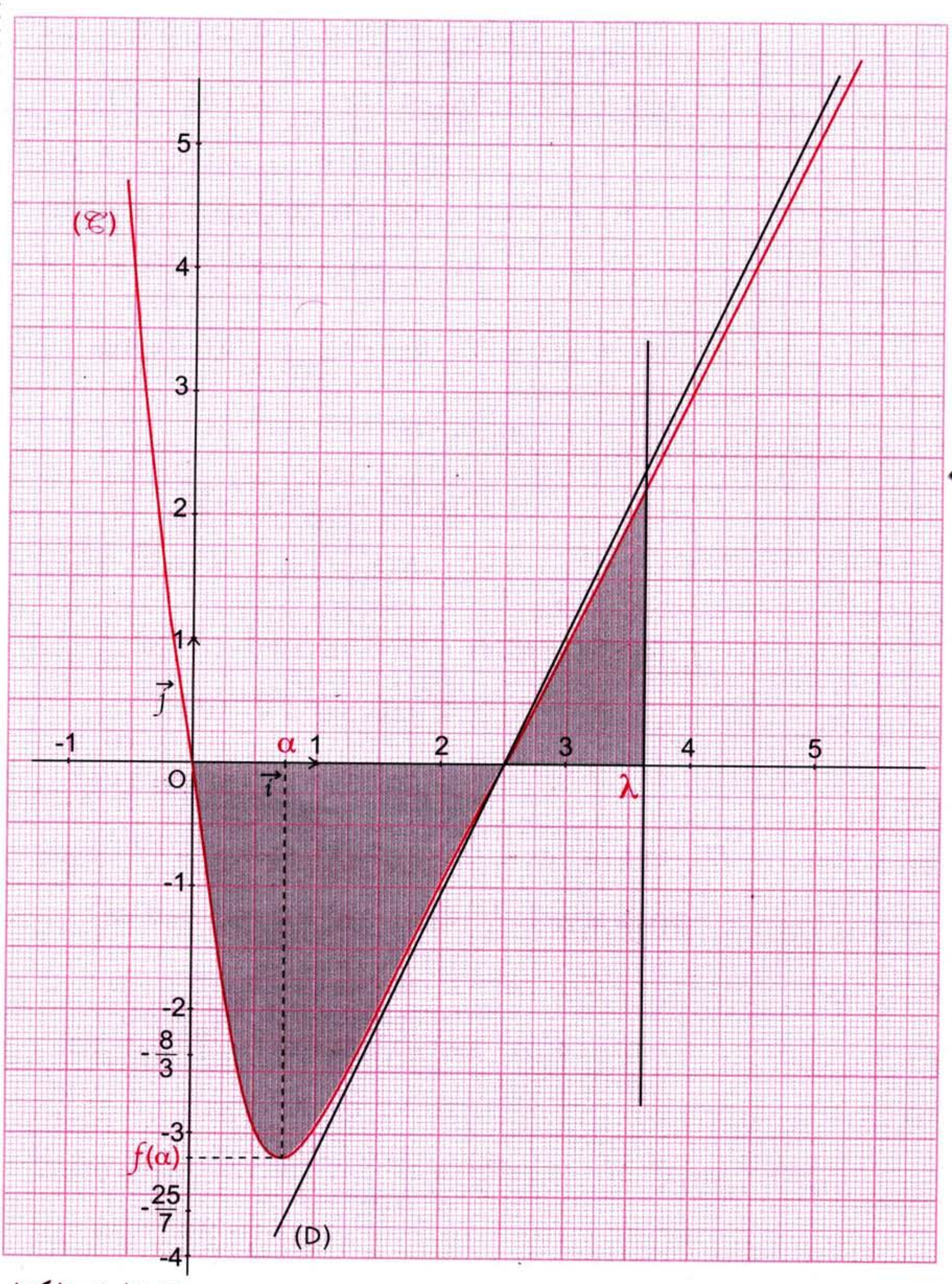
$(\mathscr{C})$ فوق (D) على المجال $\left]-\infty ; \frac{5}{2}\right[$.

$(\mathscr{C})$ يقطع (D) في النقطة ذات الفاصلة $\frac{5}{2}$.

3 • رسم $(\mathscr{C})$ و (D).

• الدالة f تقبل قيمة صغرى $f(\alpha)$ عند α.

• $(\mathscr{C})$ يقطع محور الفواصل في النقطة O و النقطة ذات الفاصلة $\frac{5}{2}$.



7. الدالة f سالبة على المجال $\left[0 ; \frac{5}{2}\right]$ و موجبة على المجال $\left[\frac{5}{2} ; +\infty\right[$

إذن $\mathcal{A}(\lambda) = -\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{5}{2}}^{\lambda} f(x)\,dx$.

حساب التكاملين السابقين باستعمال المكاملة بالتجزئة.

$\mathcal{A}(\lambda) = -\int_0^{\frac{5}{2}} (2x-5)(1-e^{-x})\,dx + \int_{\frac{5}{2}}^{\lambda} (2x-5)(1-e^{-x})\,dx$.

نضع $u(x) = 2x - 5$ و $v'(x) = 1 - e^{-x}$.

الدالة u قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و الدالة v مستمرة على $\mathbb{R}$.

إذن $u'(x) = 2$ و $v(x) = x + e^{-x}$.

$$\int_0^{\frac{5}{2}} (2x-5)(1-e^{-x})\,dx = \left[(2x-5)(x+e^{-x})\right]_0^{\frac{5}{2}} - \int_0^{\frac{5}{2}} 2(x+e^{-x})\,dx$$

$$= \left[(2x-5)(x+e^{-x}) - (x^2-2e^{-x})\right]_0^{\frac{5}{2}}$$

$$= \left[(2x-3)e^{-x} + x^2 - 5x\right]_0^{\frac{5}{2}} = 2e^{-\frac{5}{2}} - \frac{13}{4}$$

ينتج أن $\int_0^{\frac{5}{2}} (2x-5)(1-e^{-x})\,dx = 2e^{-\frac{5}{2}} - \frac{13}{4}$

$$\int_{\frac{5}{2}}^{\lambda} (2x-5)(1-e^{-x})\,dx = \left[(2x-5)(x+e^{-x}) - (x^2-2e^{-x})\right]_{\frac{5}{2}}^{\lambda}$$

$$= \left[(2x-3)e^{-x} + x^2 - 5x\right]_{\frac{5}{2}}^{\lambda}$$

$$= (2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 2e^{-\frac{5}{2}} + \frac{25}{4}$$

ينتج أن $\int_{\frac{5}{2}}^{\lambda} (2x-5)(1-e^{-x})\,dx = (2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 2e^{-\frac{5}{2}} + \frac{25}{4}$

إذن $\mathcal{A}(\lambda) = -\left(2e^{-\frac{5}{2}} - \frac{13}{4}\right) + (2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 2e^{-\frac{5}{2}} + \frac{25}{4}$

$$= (2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 4e^{-\frac{5}{2}} + \frac{19}{2}$$

و بالتالي $\mathcal{A}(\lambda) = 4\left[(2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 4e^{-\frac{5}{2}} + \frac{19}{2}\right] cm^2$

• حساب $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

لدينا $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} (2\lambda-3)e^{-\lambda} = 0$ و $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \left(\lambda^2 - 5\lambda - 4e^{-\frac{5}{2}} + \frac{19}{2}\right) = +\infty$

إذن $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = +\infty$.

حساب تكاملات باستعمال دوال أصلية

1 احسب التكاملات التالية :

$\int_{-1}^{2}(x^2+x)\,dx$ ؛ $\int_{2}^{4}\frac{1}{x}\,dx$ ؛ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$

$\int_{-3}^{-1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$ ؛ $\int_{4}^{9}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ ؛ $\int_{-3}^{-1}(t+3)^3\,dt$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)dx$ ؛ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\cos^3\theta\,d\theta$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,e^{\cos x}\,dx$ ؛ $\int_{0}^{1}\frac{2x}{4-x^2}\,dx$

$\int_{e}^{e^2}\frac{1}{x\ln x}\,dx$ ؛ $\int_{e}^{e^2}\frac{\ln x}{x}\,dx$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt$ ؛ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt$

إستعمال خاصية الخطية

2 f دالة معرفة على المجموعة $\mathbb{R}-\{-1\,;\,1\}$

كما يلي : $f(x)=\frac{2}{x^2-4}$

1. أثبت أنه يوجد عددان حقيقيان α و β

حيث من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}-\{-2\,;\,2\}$ ؛

$$f(x)=\frac{\alpha}{x-2}+\frac{\beta}{x+2}$$

2. استنتج التكامل $\int_{0}^{1}f(x)\,dx$.

3 1. تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x

من $\mathbb{R}-\{-1\,;\,3\}$ ؛

$$\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{1}{4(x-3)}-\frac{1}{4(x+1)}$$

2. احسب $\int_{0}^{2}\frac{1}{x^2-2x-3}\,dx$.

4 1. أوجد عددين حقيقيين a و b حيث من

أجل كل عدد x من $\mathbb{R}-\{-1\,;\,0\}$ ؛

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}$$

2. احسب التكامل $\int_{1}^{2}\frac{1}{x(x+1)}\,dx$.

5 عين ثلاثة أعداد حقيقية α ، β و γ

حيث من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 0 و 1-

$$\frac{1}{x^2(x+1)}=\frac{\alpha}{x^2}+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x+1}$$

احسب عندئذ التكامل $\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2(x+1)}\,dx$

6 x عدد حقيقي و I_1 و I_2 هما التكاملان التاليان :

$$I_1=\int_{0}^{x}\cos^2 t\,dt \quad \text{و} \quad I_2=\int_{0}^{x}\sin^2 t\,dt$$

1. احسب I_1+I_2 و I_1-I_2

2. استنتج I_2 و I_1

3. تحقق من صحة نتائج ② بالتعبير عن $\cos^2 t$ و $\sin^2 t$ بدلالة $\cos 2t$.

استعمال علاقة شال

7 احسب التكاملات التالية :

$\int_{-1}^{3}|x-2|\,dx$ ؛ $\int_{-2}^{4}|x^2-4|\,dx$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,dt$ ؛ $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left|2-\frac{2}{x}\right|dx$

8 1. احسب التكاملين التاليين :

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(-2t-1)\,dt \quad \text{و} \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{2}(2t+1)\,dt$$

2. استنتج حساب التكامل التالي : $\int_{-1}^{2}|2t+1|\,dt$

استعمال إيجابية التكامل

9 1. نقبل أن من أجل كل عدد حقيقي t موجب تماما ، $\ln t\leq t-1$.

استنتج، بدون حساب، إشارة التكامل $\int_{1}^{x}(t-1-\ln t)\,dt$ حسب قيم العدد x الموجب تماما.

2. تحقق أن الدالة $t\longmapsto\frac{1}{2}t^2-\ln t$

هي دالة أصلية للدالة $t\longmapsto t-1-t\ln t$

على المجال $]0\,;\,+\infty[$.

استنتج حساب التكامل $\int_{1}^{x}(t-1-\ln t)\,dt$.

حساب القيمة المتوسطة لدالة

10 في كل حالة من الحالات التالية، احسب القيمة المتوسطة u للدالة f بين a و b.

1. $f(x) = (x-2)e^x$ ؛ $a = 0$ ، $b = 1$
2. $f(x) = x\cos x + \sin x$ ؛ $a = -\frac{\pi}{2}$ ، $b = 0$
3. $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)\ln x$ ؛ $a = 1$ ، $b = e$
4. $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ؛ $a = 0$ ، $b = \pi$
5. $f(x) = \sqrt{x}$ ؛ $a = 1$ ، $b = 16$
6. $f(x) = x^2 - 9$ ؛ $a = -3$ ، $b = 3$
7. $f(x) = \cos^2 x$ ؛ $a = 0$ ، $b = \pi$
8. $f(x) = \sin^2 x$ ؛ $a = 0$ ، $b = \pi$

المكاملة بالتجزئة

11 احسب التكاملات التالية باستعمال المكاملة بالتجزئة.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt$ ؛ $\int_0^1 (3-t)e^t\,dt$

$\int_0^{\pi} (3x+2)\sin x\,dx$ ؛ $\int_0^{\pi} (-x+3)\cos x\,dx$

$\int_1^x t\ln t\,dt$ ؛ $\int_1^x \ln t\,dt$

$\int_0^2 xe^x\,dx$ ؛ $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

$\int_1^e \frac{\ln t}{t^2}\,dt$ ؛ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x-1)\sin(2x^2 - x)\,dx$

12 احسب التكاملات التالية باستعمال المكاملة بالتجزئة مرة واحدة أو أكثر.

$\int_0^1 t^2e^t\,dt$ ؛ $\int_0^1 (3t^2 - t + 1)e^t\,dt$

$\int_0^1 t^2e^{3t}\,dt$ ؛ $\int_0^{\pi} e^t\cos t\,dt$

$\int_0^{\pi} e^t\sin t\,dt$ ؛ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x\,e^{2x}\,dx$

$\int_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x\,dx$ ؛ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\sin 2t\,dt$

حساب المساحات

13 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 5\text{cm}$

1. ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$ المثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x - x^3$.
2. احسب بـ cm^2 ؛ مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$، محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 0$ و $x = 1$.

14 1 . ارسم المنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ الممثلين للدالتين f و g المعرفتين كما يلي : $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = e^{x-1}$ في المستوي المنسوب إلى المعلم $(o;\vec{i},\vec{j})$ المتعامد و المتجانس.

2 . احسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 1$ و $x = e$.

15 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = xe^{-x}$ و a عدد حقيقي موجب تماما.

1 . ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$ المثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ الوحدة 4 cm.

2 . احسب مساحة الحيز $\mathcal{A}(a)$ للمستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$، محور الفواصل و المستقيم ذوي المعادلتين $x = 0$ و $x = a$.

3 . احسب نهاية $\mathcal{A}(a)$ عندما يؤول a إلى $+\infty$.

حساب حجم مخروط الدوران

16 مخروط رأسه A و محوره (Oz) و قاعدته القرص الذي مركزه O و ارتفاعه h. (الشكل)

احسب حجم هذا المخروط علما أن نصف قطر قاعدته هو R ؛ $(R > 0)$ و $OH = z$.

مسائل

17 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ؛ الوحدة 1 cm.

1 • ارسم المنحنى $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

على المجموعة $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$

2 • احسب $\int_2^3 \ln(x-1)\, dx$.

3 • احسب بنفس الكيفية $\int_2^3 \ln(x+1)\, dx$

4 • احسب مساحة الحيز $\mathcal{A}$ المحدود بالمنحنى $(\mathcal{C})$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 2$ و $x = 3$.

18 f هي الدالة المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$(\mathcal{C})$ هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

(الوحدة هي 1 cm).

1 • ادرس تغيرات الدالة f .

2 • احسب مساحة الحيز المستوي $\mathcal{A}$ المحدود بالمنحنى $(\mathcal{C})$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 1$ و $x = e^2$.

19 f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2} .$$

$(\mathcal{C}_f)$ هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

m عدد حقيقي حيث $m \geq 1$.

يرمز $\mathcal{A}(m)$ إلى التكامل $\int_1^m |2x - f(x)|\, dx$

1 • احسب $\mathcal{A}(m)$ باستعمال المكاملة بالتجزئة.

2 • احسب، إن وجدت، نهاية $\mathcal{A}(m)$ عندما يؤول m إلى $+\infty$.

20 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = (2x - 1)\, e^{-2x} .$$

$(\mathcal{C}_f)$ هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

(الوحدة 2 cm).

1 • ادرس تغيرات الدالة f .

2 • ارسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في المعلم السابق.

3 • λ عدد حقيقي أكبر تماما من $\frac{1}{2}$ و $\mathcal{A}(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = \frac{1}{2}$ و $x = \lambda$.

• بواسطة المكاملة بالتجزئة، احسب المساحة $\mathcal{A}(\lambda)$ بدلالة λ.

• احسب $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

4 • نعتبر الدالتين h و H المعرفتين على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x) = (2x+1)^2 e^{-4x}$

و $H(x) = \left(-x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}\right) e^{-4x}$

• بيّن أن الدالة H هي دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

5 • ليكن S الحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = -\frac{1}{2}$ و $x = \frac{1}{2}$.

يرمز v إلى حجم المجسم المولد من دوران الحيز S حول محور الفواصل.

نذكر أن v معبر عنه كما يلي: $v = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 dx$

• عيّن القيمة المضبوطة للحجم v بواسطة وحدة الحجوم ثمّ قيمة مقربة للحجم v إلى 10^{-3}.

21 f هي الدالة المعرفة كما يلي :

$f(x) = x \ln |x|$ إذا كان $x \in \mathbb{R}^*$ و $f(0) = 0$.

1 • هل الدالة f مستمرة عند العدد 0 ؟

هل هي قابلة للاشتقاق عند 0 ؟

2 • ادرس تغيرات الدالة f و ارسم المنحنى $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j})$.

3 • باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب المساحة $\mathcal{A}$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathcal{C})$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = \frac{1}{e}$ و $x = 1$.

22 لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ كما يلي :

$f(x) = x|\ln x|$ إذا كان $x \in]0 ; +\infty[$ و $f(0) = 0$.

1 • ادرس استمرارية الدالة f و قابلية اشتقاقها على المجال $[0 ; +\infty[$.

2 • ادرس تغيرات الدالة f و ارسم المنحنى $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j})$.

3 • t عدد حقيقي من المجال $]0 ; 1[$.

احسب، باستعمال المكاملة بالتجزئة، المساحة $\mathcal{A}(t)$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathcal{C})$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 1$ و $x = t$.

احسب $\lim\limits_{t \to 0, t > 0} \mathcal{A}(t)$.

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي

و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.



Hard_equation

01 النهايات - الإستمرارية

1 $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 3$

2 $\lim\limits_{x \to 0} (x^3 + 3x) = 0$

3 $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^3 + 3x^2 - 4) = +\infty$

4 $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} = 0$

5 $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \left(\cos \dfrac{1}{x} - 2\right) = -\infty$

6 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+2}{x-1} = 1$ ؛ $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \dfrac{x+2}{x-1} = -\infty$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{x+2}{x-1} = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+2}{x-1} = 1$

7 $n \le E(x) < n+1$ حيث n هو الجزء الصحيح للعدد x. $\dfrac{n}{x} \le \dfrac{E(x)}{x} < \dfrac{n+1}{x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{n+1}{x} = 0$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{n}{x} = 0$

إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{E(x)}{x} = 0$.

8 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2+3x-10} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{x+5} = \dfrac{4}{7}$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -5} \dfrac{x^2-4}{x^2+3x-10} = -\infty$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -5} \dfrac{x^2-4}{x^2+3x-10} = +\infty$

9 $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} \dfrac{8x^3-27}{4x^2-9} = \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} \dfrac{4x^2+6x+9}{2x+3} = \dfrac{9}{2}$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -\frac{3}{2}} \dfrac{8x^3-27}{4x^2-9} = -\infty$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -\frac{3}{2}} \dfrac{8x^3-27}{4x^2-9} = +\infty$

10 $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+2x} - x = 1$

11 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x-5}{x+1} - \dfrac{\sin x}{x}\right) = 3$

12 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$

13 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^4} = +\infty$

14 $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = 1$

15 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{-2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}} = -2$

16 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x}{\sin 5x} = \dfrac{3}{5}$

17 $x = 1$ هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب.

$y = 1$ هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل.

18 $x = 1$ هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب.

$y = x + 2$ هي معادلة للمستقيم المقارب المائل.

19 $y = x + 1$ هي معادلة للمستقيم المقارب المائل.

20 $x = 5$ هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب. المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرع قطع مكافئ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

21 $x = -1$ هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب. المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل منحى تقاربيا باتجاه المستقيم ذي المعادلة $y = x$.

22 المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل منحى تقاربيا باتجاه المستقيم ذي المعادلة $y = x$ بجوار $+\infty$.

23 المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين مائلين معادلتاهما $y = x$ و $y = -x$.

24 المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل منحى تقاربيا و هو منحنى المستقيم ذي المعادلة $y = \sqrt{2}\,x$ و منحنى و المستقيم ذي المعادلة $y = -\sqrt{2}\,x$.

25 1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = -\infty$

2. إذن $(\mathscr{C})$ لا يقبل مستقيما مقاربا بجوار $+\infty$.

26 $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = -1$
إذن f مستمرة عند 1.

27 f ليست معرفة عند العدد 0 إذن f ليست مستمرة عند العدد 0.

28 $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = f(0)$
إذن f مستمرة عند العدد 0.

29 f ليست معرفة عند 0. إذن f ليست مستمرة عند 0.
$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = -1$ و $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 1$
f مستمرة عند العدد 0 عن اليمين و عن اليسار.

30 1. f معرفة و مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.
2. f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0 ; 1]$
و $f(0) \times f(1) < 0$. إذن المعادلة $2x^3 + 5x - 4 = 0$
تقبل حلا واحد في المجال $]0 ; 1[$.
لدينا $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ و $f\left(\frac{3}{4}\right) > 0$.
الحل x_0 ينتمي إلى المجال $\left]\frac{1}{2} ; \frac{3}{4}\right[$.

31 1. الدالة f معرفة و مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}^+$ و متناقصة تماما على $\mathbb{R}^-$.
2. f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0 ; 1]$
و $f(0) \times f(1) < 0$. إذن المعادلة $x^6 + x^2 - 1 = 0$
تقبل حلا واحد في المجال $]0 ; 1[$.
لدينا $f(1) > 0$ و $f\left(\frac{3}{4}\right) < 0$.

32 1. الدالة f معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 3x^2 - 3$.
f متزايدة تماما على $]-\infty ; -1]$ و $[1 ; +\infty[$.
f متناقصة تماما على $[-1 ; 1]$.
2. f متناقصة تماما على $[-1 ; 1]$ و مستمرة على $[-1 ; 1]$ و $f(-1) \times f(1) < 0$
إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا في المجال $]-1 ; 1[$.

33 1. f معرفة على $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$.
نعتبر الدالة g حيث $g(x) = f(x) - 2$
g مستمرة على $]-\infty ; -1[$ و $]-1 ; +\infty[$.
$$g'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(1 + x)^2}$$
g متزايدة على $]-\infty ; -2]$ و $[0 ; +\infty[$
g متناقصة على $[-2 ; -1[$ و $]-1 ; 0]$.
2. g معرفة، مستمرة و متزايدة تماما على $[2 ; 3]$
و $g(2) g(3) < 0$.
إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا واحد في $]2 ; 3[$
بالتالي المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلا واحدا في $]2 ; 3[$.

34 لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :
$f(x) = x - \cos x$ ؛ $f'(x) = 1 + \sin x$.
الدالة f معرفة و مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
إذن المعادلة تقبل حلا واحِدا في $\mathbb{R}$.
و بالتالي المعادلة $\cos x = x$ تقبل حلا واحدا في $\mathbb{R}$.

35 لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :
$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 2$.
الدالة f معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$.
$f'(x) = -3x^2 + 4x - 1$
f متناقصة على $\left]-\infty ; \frac{1}{3}\right]$ و $[1 ; +\infty[$
و متزايدة على $\left[\frac{1}{3} ; 1\right]$.
لدينا f معرفة و مستمرة و متناقصة تماما على $[1 ; 3]$ و $f(1) \times f(3) < 0$
إذن المعادلة تقبل حلا واحد في $]1 ; 3[$

36 1. f معرفة على $]-\infty ; -2[\cup]-2 ; +\infty[$.

$a = 5$ ؛ $b = -9$ ؛ $c = 19$

$$f(x) = 5x - 9 + \frac{19}{x+2}$$

2. $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور التراتيب معادلته $x = -2$ و مستقيم مقارب مائلا (Δ) معادلته $y = 5x - 9$.

في المجال $]-\infty ; -2[$، $(\mathscr{C}_f)$ تحت (Δ).

في المجال $]-2 ; +\infty[$، $(\mathscr{C}_f)$ فوق (Δ).

37 $m = 0$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$m > 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{(1-m)x^2 + 2x - 3}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} - mx}$$

$0 < m < 1$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$m = 1$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

$m > 1$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$m < 0$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$-1 < m < 0$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$m = -1$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$m < -1$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

38 الدالة $x \longmapsto x^2 + x + 1$ مستمرة على $\mathbb{R}$ و الدالة sin مستمرة على $\mathbb{R}$ الدالة h هي مركب الدالتين $x \longmapsto x^2 + x + 1$ و $x \longmapsto sinx$، فهي مستمرة على $\mathbb{R}$. و بالتالي الدالة h مستمرة عند كل عدد حقيقي x_0.

39
$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

40 1. مجموعة تعريف f هي $\mathbb{R} - \{-1\}$.

$a = 1$ ؛ $b = 1$ ؛ $\varphi(x) = \frac{2x+4}{(x+1)^2}$.

إذن $f(x) = x + 1 + \frac{2x+4}{(x+1)^2}$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = +\infty$

3. $x = -1$ هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب.

$y = x + 1$ هي معادلة للمستقيم المقارب المائل.

41 حجم المكعب هو x^3.

حجم المتوازي المستطيلات هو $3(3x + 4)$.

حل المعادلة $x^3 = 3(3x + 4)$ في $\mathbb{R}_+^*$.

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ كما يلي :

$$f(x) = x^3 - 9x - 12$$

الدالة f مستمرة $\mathbb{R}_+^*$، متزايدة على $[\sqrt{3} ; +\infty[$ و متناقصة على $]0 ; \sqrt{3}]$.

$f(3) = -12$ و $f(4) = 16$

$f(3) \times f(4) < 0$ و بالتالي المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا في المجال $]3 ; 4[$.

$f(3,5) = -0,625$ و $f(3,6) = 2,256$

$f(3,5) \times f(3,6) < 0$

إذن الحل x ينتمي إلى المجال $]3,5 ; 3,6[$.

و بالتالي يكون حجم المكعب يساوي حجم متوازي المستطيلات من أجل قيمة x حيث $3,5 < x < 3,6$.

02 الاشتقاق

1

• 1 f قابلة للاشتقاق عند 1 و $f'(1) = 2$.

• 2 f قابلة للاشتقاق عند 5 و $f'(5) = \frac{9}{4}$.

• 3 f قابلة للاشتقاق عند 2- و $f'(-2) = 192$.

• 4 f قابلة للاشتقاق عند 0 و $f'(0) = -1$.

• 5 f قابلة للاشتقاق عند 0 و $f'(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

• 6 f قابلة للاشتقاق عند 0 و $f'(0) = -12$.

• 7 f قابلة للاشتقاق عند 0 عن اليمين و $f'(0) = 0$.

• 8 f ليست قابلة للاشتقاق عند 0.

2

• 1 $y = 7x - 14$

• 2 المنحنى يقبل نصفي مماس يوازيان محور التراتيب في النقطة ذات الفاصلة 1 معادلاتهما $x = 1$ حيث $y \geq 1$ و $x = 1$ حيث $y \leq 1$.

• 3 $y = 12x - 24$ ؛ $y = -12x + 24$

• 4 $x = 0$ على المجال $]-\infty ; 0]$.

• 5 المنحنى يقبل نصفي مماس يوازيان محور التراتيب في النقطة A فاصلتها 2، معادلاتهما $x = 2$ حيث $y \geq 2$ و $x = 2$ حيث $y \leq 2$.

• 6 المنحنى يقبل نصفي مماس معادلاتهما

$y = 4x - 3$ حيث $x \geq 1$

$y = 1$ حيث $x \leq 1$

• 7 المنحنى يقبل نصف مماس عن اليمين عند نقطة فاصلتها 2-، يوازي محور التراتيب و معادلته $x = -2$ حيث $y \geq -2$.

3

• 1 $D' = \mathbb{R} - \{0\}$ ؛ $f'(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x^2}$

• 2 $D' = \mathbb{R} - \{2\}$ ؛ $f'(x) = \frac{2x^2 - 8x + 6}{(x - 2)^2}$

• 3 $D' = \mathbb{R} - \{1\}$ ؛ $f'(x) = \frac{-3x^2 + 6x - 4}{4(1 - x)^2}$

• 4 $D' = \mathbb{R} - \{-1\}$ ؛ $f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{(x + 1)^2}$

• 5 $D' = \mathbb{R} - \{-1\}$ ؛ $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{2(x + 1)^2}$

• 6 $D' = \mathbb{R} - \{1\}$ ؛ $f'(x) = 2 + \frac{4}{(1 - x)^3}$

• 7 $D' =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ ؛ $f'(x) = 1 + \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

• 8 $D' = [0 ; +\infty[$ ؛ $f'(x) = \frac{\sqrt{2}(3x - 1)}{2\sqrt{x}}$

• 9 $D' =]-2 ; 2[$ ؛ $f'(x) = \frac{-2}{(2 + x)^2}\sqrt{\frac{2 + x}{2 - x}}$

• 10 $D' = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = -\frac{1}{2}\cos\pi x + \left(\frac{2x + 1}{4}\right)\pi\sin\pi x$

• 11 $D' = \left]-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right[$ ؛ $f'(x) = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

• 12 $D' = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$f'(x) = \frac{2(\cos 2x - \sin 2x + 1)}{(1 - \sin 2x)^2}$$

4 f مستمرة عند 1.

f قابلة للاشتقاق عند 1 و $f'(1) = 0$

5

• 1 $Df = \mathbb{R} - \{0\}$

• 2 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + 1} = \frac{1}{2}$

الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0 و $g'(0) = \frac{1}{2}$.

بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 فإنها مستمرة عند 0.

6

• 1 $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = 3x^2(1 - x)^2(1 - 2x)$

f متزايدة على $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right]$

و متناقصة على $\left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

2 • $D = \mathbb{R}_+$ ؛ $f'(x) = 1 - \frac{5}{2\sqrt{x}}$

f متزايدة على $\left]\frac{25}{4} ; +\infty\right[$

و متناقصة على $\left[0 ; \frac{25}{4}\right]$.

3 • $D = \mathbb{R} - \{2\}$ ؛

$$f'(x) = \frac{3(x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3})}{(x-2)^2}$$

f متزايدة على $]2 + \sqrt{3} ; +\infty[$ و $]-\infty ; 2 - \sqrt{3}]$

f متناقصة على $[2 - \sqrt{3} ; 2[$ و $]2 ; 2 + \sqrt{3}]$.

4 • $D = \mathbb{R} - \{0\}$ ؛ $f'(x) = -1 + \frac{8}{x^3}$

f متزايدة على $]0 ; 2]$

f متناقصة على $[2 ; +\infty[$ و $]-\infty ; 0[$.

5 • $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = 1 + \cos x$

f متزايدة على $\mathbb{R}$.

6 • $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$ ؛

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = -\tan^2 x$$

f متناقصة على كل مجال محتوى في D.

7 • $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = 10x^4 - 20x^3 + 12x^2$

f متزايدة على $\mathbb{R}$.

8 • $D = \mathbb{R} - \{-1\}$ ؛ $f'(x) = \frac{7}{(x+1)^2}$

f متزايدة على $]-1 ; +\infty[$ و $]-\infty ; -1[$.

9 • $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$ ؛ $f'(x) = \frac{-7}{(2x-5)^2}$

f متناقصة على $\left]-\infty ; \frac{5}{2}\right[$ و $\left]\frac{5}{2} ; +\infty\right[$.

10 • $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = 12x^2 - 12x$

f متزايدة على $]-\infty ; 0]$ و $[1 ; +\infty[$.

f متناقصة على $[0 ; 1]$.

7 f دالة ناطقة إذن f معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$

و قابلة للاشتقاق n مرة على $]-\infty ; 1[$ و $]1 ; +\infty[$.

من أجل كل عدد x من $\mathbb{R} - \{1\}$ ؛

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$

8 1 • $n \geq 6$ ؛ $f^{(6)}(x) = 0$

2 • من أجل كل عدد x من $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ؛

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! 2^n}{(2x-1)^{n+1}}$$

3 • من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$$f^{(n)}(x) = 2^n \sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

9 $f''(x) = -9\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$-9\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 9\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

إذن f حل للمعادلة التفاضلية $y'' + 9y = 0$.

10 2 •

x	$-\infty$ 1	1 2	2 $+\infty$
$f'(x)$	-	-	-
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 0

3 • $A\left(\frac{3}{2} ; 0\right)$ ؛ $(T_A) : y = -8x + 12$

4 • يكفي إثبات أن من إجل كل عدد x من Df

$$f(3 - x) = -f(x)$$

11 أ) 2 • جدول تغيرات f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

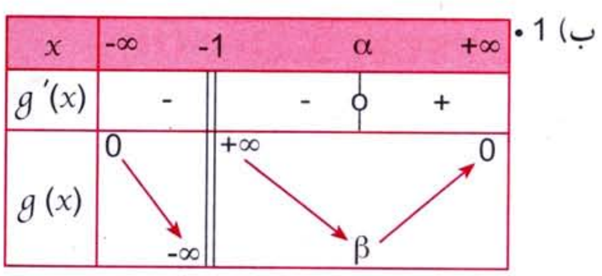
2• f مستمرة و متزايدة تماما على $[1,6\ ;\ 1,7]$

و $f(1,6)\ f(1,7) < 0$

إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحد α حيث

$.1,6 < \alpha < 1,7$

ب) 1•



x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	β	↗	0

$\beta = g(\alpha)$ ؛ $1,6 < \alpha < 1,7$

2• $(\Delta) : y = -x + 1$

3• نضع $d(x) = g(x) - (-x+1) = \dfrac{(x-1)x^3}{x^3+1}$

إذا كان $0 \le x \le 1$ فأن $d(x) \le 0$

إذا كان $-1 < x \le 0$ فأن $d(x) \ge 0$

$(1\ ;\ 0)$ حل للجملة $\begin{cases} y = g(x) \\ y = -x + 1 \end{cases}$

4• معادلة (T) هي $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

12 1• $a = 4$ ؛ $b = 0$

2• $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x}{x^2 + 1}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	↘	-1	↗	4	↘	3

$(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور الفواصل معادلته $y = 3$.

13 1• $f(x) = a$ ؛ $a \in \mathbb{R}$

2• $f(x) = -5x + b$ ؛ $b \in \mathbb{R}$

3• $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x^2 - x + b$ ؛ $b \in \mathbb{R}$

4• $f(x) = 6\sqrt{x} + b$ ؛ $b \in \mathbb{R}$

5• $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}\sin 2x + b$ ؛ $b \in \mathbb{R}$

6• $f(x) = ax + b$ ؛ $a \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R}$

7• $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + bx + c$ ؛ $b \in \mathbb{R}$ ، $c \in \mathbb{R}$

8• $f(x) = \dfrac{1}{6}x^3 - x^2 + bx + c$ ؛ $b \in \mathbb{R}$ ، $c \in \mathbb{R}$

9• $f(x) = \dfrac{1}{12}x^3 - \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + bx + c$ ؛

$b \in \mathbb{R}$ ، $c \in \mathbb{R}$

10• $f(x) = -\dfrac{9}{\pi^2}\sin\dfrac{\pi}{3}x + bx + c$ ؛

$b \in \mathbb{R}$ ، $c \in \mathbb{R}$

14 1• $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-a)^2}$ ؛ $f''(x) = \dfrac{2}{(x-a)^3}$

$f'''(x) = \dfrac{-6}{(x-a)^4}$

2• $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$

3• $g(x) = \dfrac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x-1}$

$g^{(n)}(x) = \dfrac{-\frac{1}{2}(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} + \dfrac{\frac{1}{2}(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$

15 1• ب) • $h(x) = (x-1)(2x^2 + 5x + 5)$

$h(x) > 0$ من أجل $x > 1$.

$h(x) = 0$ من أجل $x = 1$.

$h(x) < 0$ من أجل $x < 1$.

2• $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

ب) • $f(x) = x^2 - x + \dfrac{4}{(x+1)}$

$a = 1$ ؛ $b = -1$ ؛ $c = 4$

جـ) • $f(x) - g(x) = \dfrac{4}{x+1}$

03 الدوال الأصلية

1 الدالة F معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

1. $F'(x) = 3x^2 - 1 = f(x)$

إذن F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

2. الدالة F معرفة و قابلة للاشتقاق

على $]-1 ; +\infty[$ و $F'(x) = \sqrt{x+1} = f(x)$

إذن F هي دالة أصلية للدالة f على $]-1 ; +\infty[$

3. الدالة F معرفة و قابلة للاشتقاق

على $]0 ; +\infty[$ و $F'(x) = 2\left(x - \frac{1}{x^3}\right) = f(x)$

إذن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f

على $]0 ; +\infty[$

4. الدالة F معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

و $F'(x) = \cos x - x\sin x = f(x)$

إذن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

2 الدالة $F : x \longmapsto 2\sin^2 x$

هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = 2\sin 2x$

على $\mathbb{R}$ لأن الدالة L معرفة و قابلة للاشتقاق

على $\mathbb{R}$ و $L'(x) = f(x)$.

3 1. $F(x) = -\frac{7}{12} + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$

2. $F(x) = 1 + \cos 2x$

3. $F(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sin 3x$

4. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + \frac{7}{2}$

4 1. الدوال F حيث $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + x + c$

هي الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ؛ $c \in \mathbb{R}$

2. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{x} + c$

3. $F(x) = -\cos x - 2\sin x + c$

4. $F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{3}x^3 + c$

5. $F(x) = 4\sin\left(\frac{x-\pi}{4}\right) + c$

6. $F(x) = x - \tan + c$

7. $F(x) = \frac{1}{5}(x-3)^5 + c$

8. $F(x) = -\frac{1}{3}\cos^3 x + c$

9. $F(x) = \frac{2}{3}(x^2+4)^3 + c$

10. $F(x) = -\frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^5 + c$

11. $F(x) = \frac{2}{3}(\sqrt{x}+1)^3 + c$

12. $F(x) = -\frac{1}{(x-3)} + c$

13. $F(x) = -\frac{1}{\sin x} + c$

14. $F(x) = \frac{1}{\cos x} + c$

15. $F(x) = 2\sqrt{x+1} + c$

16. $F(x) = 2\sqrt{3+\sin x} + c$

17. $F(x) = -\sqrt{1-x^2} + c$

18. $F(x) = x\sin x + c$

19. $F(x) = \frac{\sin x}{x} + c$

20. $F(x) = x\sqrt{1+x^2} + c$

5 1. $F(x) = \frac{1}{4}\sin^4 x + c$

2. $F(x) = -\frac{1}{3}\cos^3 x + c$

3. $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x + c$

4. $F(x) = \frac{-5}{4(x+5)^4} + c$

5. $F(x) = x^2 + 3x + c$

6. $F(x) = \frac{-1}{3(1+x^3)} + c$

7. $F(x) = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+1} + c$

6 $F'(x) = f(x)$

إذن F هي دالة أصلية للدالة f على $]1 ; +\infty[$.

7 $F'(x) = f(x)$ على $\mathbb{R}$.

الدوال $x \longmapsto -x^3 + 2x^2 + x - 1 + c$ هي الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

8 1• $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + c$ ؛ $c \in \mathbb{R}$

2• $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c$

3• $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + c$

4• $F(x) = -\frac{1}{x^2} + c$

5• $F(x) = \frac{3}{2x^2} + \sin x + c$

6• $F(x) = 12\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 - 2x + c$

7• $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + c$

9 1• $F(x) = 2\sqrt{4 + \sin x}$

2• الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

هي الدوال $x \longmapsto 2\sqrt{4 + \sin x} + c$ ؛ $c \in \mathbb{R}$

10 1• $F(x) = x + \frac{27}{2x^2}$

إذن $a = 1$ و $b = \frac{27}{2}$

2• $G(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{27}{2x} + c$ ؛ $c \in \mathbb{R}$

3• $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{27}{2x} + 14$

11 1• $G(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 1) + c$

2• $F(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 1) - 1$

12 العبارة الخطية لـ $\cos^3 x$ و $\cos^3 x$

هما $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$

$\sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$

الدوال $x \longmapsto \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + c$

هي الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

الدوال $x \longmapsto -\frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x + c$

هي الدوال الأصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

04 الدوال الأسية

1 $e^{2x}e^{3x} = e^{5x}$ ؛ $e^{x}e^{-2x} = e^{-x}$

$e^{1-x}e^{3x+3} = e^{2x+4}$ ؛ $(e^{3x})^2 = e^{6x}$ ؛ $(e^{x})^{-2} = e^{-2x}$

$e^{\frac{1}{2}}e^{-2} = e^{-\frac{3}{2}}$ ؛ $\frac{e^5}{e^2} = e^3$ ؛ $\frac{e^{-0,2}}{e^{0,2}} = e^{-0,4}$

2 $a = 1$ و $b = -1$

3 $a = 1$ ؛ $b = 0$ ؛ $c = -4$

4 $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ ؛ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x - e^x) = -\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x + 1} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (2xe + 3 - 5e^x) = -\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{1 + e^x} = 0$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x + 1} = 0$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^2 + x - 5)e^x = -\infty$

5 $f(x) = 2e^x$ ؛ $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = 2e^x$

$f(x) = e^{3-x}$ ؛ $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = -e^{3-x}$

$f(x) = \sqrt{e^x}$ ؛ $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = \frac{\sqrt{e^x}}{2}$

$f(x) = (x^2 - 2x)e^{-x}$ ؛ $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = (-x^2 + 4x - 2)e^{-x}$

$f(x) = \frac{5e^x - 1}{1 - e^x}$ ؛ $D = \mathbb{R}^*$ ؛ $f'(x) = \frac{4e^x}{(1 - e^x)^2}$

$f(x) = e^{3x+1}$ ؛ $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = 3e^{3x+1}$

$f(x) = e^{\sin 2x}$ ؛ $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = 2\cos 2x \, e^{\sin 2x}$

$f(x) = (3x + 1)e^x$ ؛ $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = (3x + 4)e^x$

$f(x) = e^x \sin x$ ؛ $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = (\sin x + \cos x)e^x$

$f(x) = e^{-x}(\cos 3x - \sin 3x)$

$D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = e^{-x}(-4\cos 3x - 2\sin 3x)$

6 حل المعادلة $e^x = 1$ هو 0.

حلا المعادلة $e^{x^2} = e^{25}$ هما 5 و 5-.

حلا المعادلة $e^{x^2+5} = e^{5x-1}$ هما 2 و 3.

حلول المعادلة $e^{\sin x} = e^{\cos x}$ هي الأعداد x

حيث $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

حل المعادلة $e^x + 1 = \frac{2}{e^x}$ هو 0.

المعادلة $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$ لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$.

حل المعادلة $e^{4x} - e^{2x} = 0$ هو 0.

حل المعادلة $e^x + e^{-x} = 2$ هو 0.

حل المعادلة $e^{2x} + 2e^{-x} - 3 = 0$ هو 0.

حل المعادلة $e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$ هو 0.

7 مجموعة حلول المتراجحة $e^x \geq \sqrt{e}$ هي $\left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

مجموعة حلول المتراجحة $e^{x^2-2} \leq e^{4-x}$ هي $[-3 ; 2]$

مجموعة حلول المتراجحة $e^{2x} - e^x < 0$ هي $]-\infty ; 0[$.

مجموعة حلول المتراجحة $e^{2x} + 2e^x - 3 \geq 0$ هي $[0 ; +\infty[$.

مجموعة حلول المتراجحة $e^{4x} + 5e^{2x} - 6 \leq 0$ هي $]-\infty ; 0]$.

مجموعة حلول المتراجحة $e^{x^2} e^x < (e^3)^2$ هي $]-3 ; 2[$.

مجموعة حلول المتراجحة $e^{2x} > e^{x+1}$ هي $]1 ; +\infty[$.

8

$f(x) = e^{-x}$ ؛ $F(x) = -e^{-x}$

$f(x) = \frac{1}{2} e^{3x} - 5e^{2x}$ ؛ $F(x) = \frac{1}{6} e^{3x} - \frac{5}{2} e^{2x}$

$f(x) = xe^{x^2}$ ؛ $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2}$

$f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ ؛ $F(x) = -e^{\frac{1}{x}}$

$f(x) = \frac{-e^x}{(e^x + 3)^2}$ ؛ $F(x) = \frac{1}{e^x + 3}$

9 $a = 2$ ؛ $b = -3$

10 1. حل المعادلة $f(x) = 0$ هو 0.

2. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	2	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

5. $k < 0$ ؛ المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا واحدا سالبا.

$k = 0$ ؛ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا هو 0.

$k > 0$ ؛ المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا واحدا موجبا.

6. $A(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(x)\, dx = e^{\lambda} + e^{-\lambda} - 2$

$\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = +\infty$

11 1. f معرفة على $\mathbb{R}$ ؛ $f(0) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -3$ ؛ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2. $(T) : y = 5x$

3.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$4e^{2x} + e^x - 5$		$-$	0	$+$	
$f(x) - 5x$		$+$	0	$+$	

$(\mathscr{C})$ فوق (T) في المجال $]-\infty ; +\infty[$.

(T) يقطع $(\mathscr{C})$ في النقطة $O(0 ; 0)$.

12 1. $D = \mathbb{R}$ 2. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

3. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ 4. $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$

$f'(x) > 0$ على $\mathbb{R}$ ؛ f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

5. يكفي إثبات أن $f(x) + f(-x) = 1$

6. $(T) : y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

7. أ) $e^{2x} - 2e^x + 1 = (e^x - 1)^2$

ب) $g'(x) = \frac{1}{4} - f'(x)$ ؛ $g(0) = \frac{1}{2} - f(0)$

تغيرات g ملخصة في الجدول التالي

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

جـ) $(\mathscr{C})$ تحت (T) في المجال $]0 ; +\infty[$.

$(\mathscr{C})$ فوق (T) في المجال $]-\infty ; 0[$.

$(\mathscr{C})$ يقطع (T) عند النقطة $A\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$.

13 1. $I_1 = \int_0^1 xe^{-x}\,dx = -\frac{2}{e} + 1$

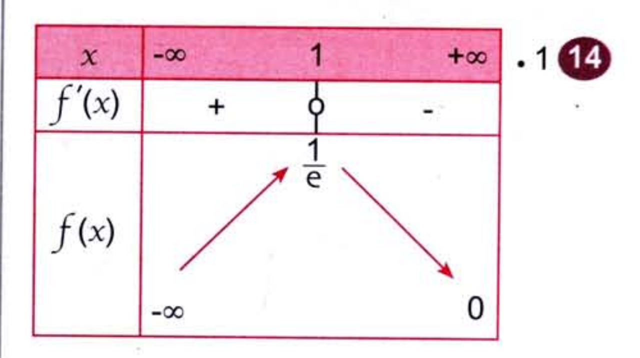
2. نستعمل المكاملة بالتجزئة لحساب I_{n+1}.

و نجد $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$.

3. نستعمل $I_2 = -\frac{1}{e} + 2I_1 = -\frac{5}{e} + 2$

$I_3 = -\frac{1}{e} + 3I_2 = -\frac{16}{e} + 6$

14 1.



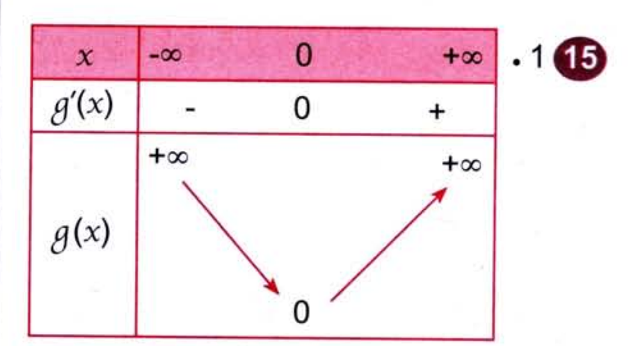
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

3. $A(\lambda) = 1 - (1+\lambda)e^{-\lambda}$

أو أيضا $A(\lambda) = 16\,[1 - (1+\lambda)e^{-\lambda}]\ cm^2$

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^{\lambda}} - \frac{\lambda}{e^{\lambda}}\right) = 1$

15 1.



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

لدينا $g(0) = 0$.

2. ينتج أن $g(x) \geq 0$. أي $e^x - x - 1 \geq 0$

و بالتالي $e^x - x \geq 1$ أي $0 < \frac{e^x}{e^x - x} \leq e^x$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $\frac{e^x}{e^x - x} > 0$

3. حسب السؤال 2، لدينا من أجل كل عدد حقيقي x،

$\frac{e^x}{e^x - x} > 0$ أي $f(x) > 0$.

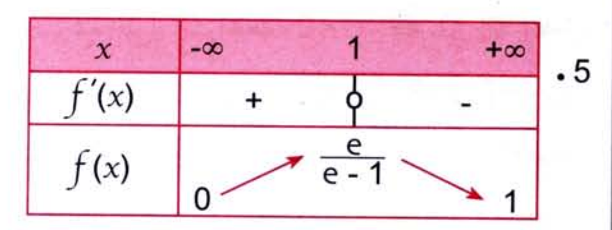
$0 \leq \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{e^x - x} \leq \lim\limits_{x \to -\infty} e^x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

4. من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

5.

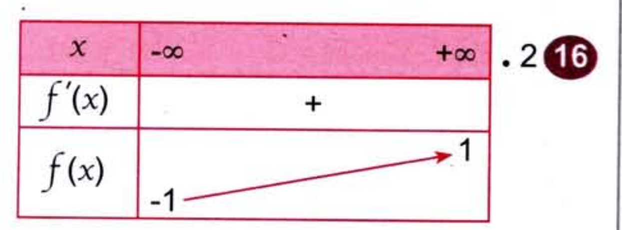


x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{e}{e-1}$	↘	1

6. المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$.

المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

16 2.



x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	↗	1

3. $a = 1$ و $b = -2$ ؛ $f(x) = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$

4. من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f(-x) = -f(x)$

و بالتالي f فردية على $\mathbb{R}$.

5. f'' تنعدم و تغير إشارتها عند العدد 0

إذن النقطة ذات الفاصلة 0 نقطة إنعطاف $(\mathscr{C})$.

6. تنعدم $(T) : y = \frac{1}{2}x$

7 . في المجال $]0 ; +\infty[$ ، (T) فوق $(\mathscr{C})$

في المجال $]-\infty ; 0[$ ، (T) تحت $(\mathscr{C})$ و عند النقطة $O(0 ; 0)$ ، (T) يقطع $(\mathscr{C})$.

17 1 . مجموعة التعريف هي $\mathbb{R}$.

2 . من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $1 < 2 + \cos x < 3$

و $e^{1-x} > 0$. إذن من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$(2 + \cos x)\, e^{1-x} > 0$. و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) > 0$.

3 . $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$

$= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

من أجل كل عدد حقيقي x ،

$-\sqrt{2} \le \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$. إذن من أجل كل عدد حقيقي x ، $-\sqrt{2} \le \cos x + \sin x \le \sqrt{2}$

و بالتالي $2 - \sqrt{2} \le 2 + \cos x + \sin x \le 2 + \sqrt{2}$

أي من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$2 + \cos x + \sin x > 0$ ؛ (لأن $2 - \sqrt{2} > 0$)

4 . $1 \le 2 + \cos x \le 3$

إذن $e^{1-x} < (2 + \cos x)\, e^{1-x} < 3e^{1-x}$

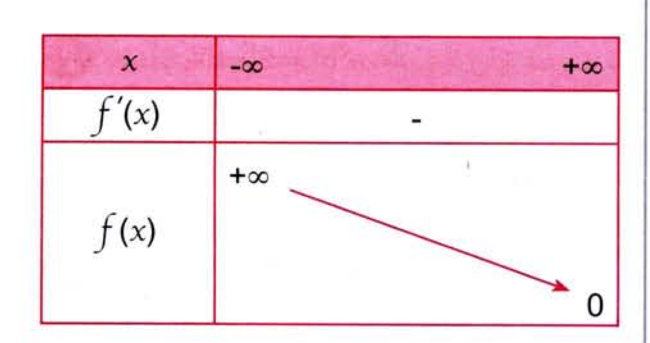
أي من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $e^{1-x} < f(x) < 3e^{1-x}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ؛ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

5 . $f'(x) = -(2 + \cos x + \sin x)\, e^{1-x}$

من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) < 0$

و بالتالي f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.



x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

• المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

• $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرع قطع مكافئ بجوار $-\infty$.

7. الدالة $x \longmapsto f(x) - 3$ معرفة، مستمرة و متناقصة تماما على $[0 ; \pi]$

و $\left(f(0) - 3\right)\left(f(\pi) - 3\right) < 0$

إذن المعادلة $f(x) - 3 = 0$ تقبل حلا واحدا في $]0 ; \pi[$.

أي المعادلة $f(x) = 3$ تقبل حلا واحدا α حيث $0 < \alpha < \pi$.

05 الدوال اللوغاريتمية

1 $\ln\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) = 0$

$4\ln(\sqrt{2} + 1) + 4\ln(\sqrt{2} - 1) - 5\ln 2 = -\ln 32$

$\frac{\ln(\sqrt{3} + 1) + \ln(\sqrt{3} - 1)}{2} = \ln\sqrt{2}$

$\frac{7}{16}\ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2} + 1) - \frac{25}{8}\ln(\sqrt{2} - 1) = 0$

$2\ln e^4 = 8$ ؛ $8 - \ln\frac{1}{e} = 9$

2 $\ln a^2b^3 = 2\ln a + 3\ln b$

$$6\ln \frac{1}{\sqrt{a^2b}} = -6\ln a - 3\ln b$$

3 $\ln 500 = 2\ln 2 + 3\ln 5$

$\ln 6{,}25 = 2\ln 5 - 2\ln 2$ ؛ $\ln\frac{16}{25} = 4\ln 2 - 2\ln 5$

$$\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ldots + \ln\frac{98}{99} + \ln\frac{99}{100} =$$
$$= -2\ln 2 - 2\ln 5$$

4 $n \leq 9$ ؛ $n \geq 4$ ؛ $n \geq 10$ ؛ $n \geq 1$

5 مجموعة حلول المعادلة $\ln x = 2$ هي $\{e^2\}$

مجموعة حلول المعادلة $\ln x = -2$ هي $\{e^{-2}\}$

مجموعة حلول المعادلة $\ln x = \frac{1}{2}$ هي $\{\sqrt{e}\}$

مجموعة حلول المعادلة $\ln |x| = 2$ هي $\{e^2 ; -e^2\}$

مجموعة حلول المعادلة $\ln x^2 = 4$ هي $\{e^2 ; -e^2\}$

مجموعة حلول المعادلة $[\ln(x)]^2 = 4$ هي $\{e^2 ; e^{-2}\}$

6 • مجموعة حلول المعادلة

$\ln(1-x) = 2\ln 3 - 3\ln 2$ هي $\{-\frac{1}{8}\}$.

• مجموعة حلول المعادلة $\ln(1-x)^2 = 4\ln 2$

هي $\{-3 ; 5\}$.

مجموعة حلول المعادلة $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = -3\ln 2$ هي $\{-7\}$.

مجموعة حلول المعادلة $\ln\sqrt{1-x} = \frac{1}{2}\ln 3$ هي $\{-2\}$.

7 • مجموعة حلول المعادلة

$\ln(2x+7) = \ln(x-3)$ هي $\varnothing$.

• مجموعة حلول المعادلة

$\ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3)$ هي $\{1\}$.

• مجموعة حلول المعادلة

$\ln(x-3) = \ln(x+7) - \ln(x+1)$ هي $\{5\}$.

• مجموعة حلول المعادلة

$\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7)$ هي $\{-2 ; 5\}$.

• مجموعة حلول المعادلة

$\ln\left(\frac{x+7}{x+1}\right) = \ln(x+3)$ هي $\{1\}$.

• مجموعة حلول المعادلة

$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln(x+2)$ هي $\{-\frac{4}{3}\}$.

• مجموعة حلول المعادلة

$$\frac{1}{2}\ln(x-1) + \ln(x+1) = 2 + \ln\sqrt{1+x}$$

هي $\{\sqrt{1+e^4}\}$.

8 1 • $a = 12$ ؛ $b = -11$ ؛ $c = 2$.

$$P(x) = (x+1)(12x^2 - 11x + 2)$$

• مجموعة حلول المعادلة $P(x) = 0$ هي $\{-1 ; \frac{2}{3} ; \frac{1}{4}\}$.

• مجموعة حلول المعادلة

$$12(\ln x)^3 + (\ln x)^2 - 9\ln x + 2 = 0$$

هي $\{\frac{1}{e} ; e^{\frac{2}{3}} ; e^{\frac{1}{4}}\}$

9 • مجموعة حلول المتراجحة $\ln(3-x) \leq 0$

هي $[2\,;3[$.

• مجموعة حلول المتراجحة $\ln\left(\frac{x+1}{2x+1}\right) \geq 0$

هي $\left]-\frac{1}{2}\,;0\right]$.

• مجموعة حلول المتراجحة $\ln(x+2)+\ln(3+x)>0$

هي $\left]\frac{-5+\sqrt{5}}{2}\,;+\infty\right[$

• مجموعة حلول المتراجحة $\ln(x^2-4) > \ln(6x+5)$

هي $]3+3\sqrt{2}\,;+\infty[$.

• مجموعة حلول المتراجحة

$\ln(2x-5)+\ln(x+1) \leq 2\ln 2$ هي $\left]\frac{5}{2}\,;3\right]$.

10 • مجموعة حلول المتراجحة

$\ln(x+1)>\ln(4x-1)-\ln(x-1)$ هي $]-4\,;+\infty[$

• مجموعة حلول المتراجحة

$\ln(x^2+11x+30) > \ln(x+14)$

هي $]-14\,;-8[\cup]-2\,;+\infty[$.

• مجموعة حلول المتراجحة

$\ln(x^2-2e^2) \leq \ln x + 1$ هي $[e\sqrt{2}\,;2e]$.

• مجموعة حلول المتراجحة

$\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \geq 0$ هي $\left]\frac{5}{3}\,;3\right]$.

11 • مجموعة حلول الجملة $\begin{cases} x+y=30 \\ \ln x + \ln y = 3\ln 6 \end{cases}$

هي $\{(12\,;18)\,;(18\,;12)\}$.

• مجموعة حلول الجملة $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases}$

هي $\{(2\,;1)\,;(1\,;2)\}$.

• مجموعة حلول الجملة $\begin{cases} 2\ln x + 3\ln y = -2 \\ 3\ln x + 5\ln y = -4 \end{cases}$

هي $\{(e^2\,;e^{-2})\}$.

• مجموعة حلول الجملة $\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln\frac{2}{3} \\ x+y=\frac{4}{3} \end{cases}$

هي $\varnothing$.

• مجموعة حلول الجملة $\begin{cases} 5x+4y=12 \\ \ln(x-1)+\ln y = \ln 3 - \ln 5 \end{cases}$

هي $\left\{\left(\frac{9}{5};\frac{3}{4}\right);\left(\frac{8}{5};1\right)\right\}$.

• مجموعة حلول الجملة $\begin{cases} \ln(x^2-y^2)=0 \\ x-y=2 \end{cases}$

هي $\left\{\left(\frac{5}{4}\,;-\frac{3}{4}\right)\right\}$.

12 $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \sqrt{1+(\ln x)^2} = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+(\ln x)^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (x-2\ln x) = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2\ln x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2} = 1$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2} = 1$

13 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-\ln x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = 0$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2\ln x}{1+x} = +\infty$

؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{2x-3}{x}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1+2e^x}{e^{2x}-1}\right) = -\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x-(\ln x)^2\right] = +\infty$

14 $f(x) = \ln(5x-1)$ ؛ $D = \left]\frac{1}{5} ; +\infty\right[$

$f'(x) = \frac{5}{5x-1}$.

$f(x) = \ln|7-2x|$ ؛ $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{7}{2}\right\}$

$f'(x) = \frac{-2}{7-2x}$.

$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$ ؛ $D =]-\infty ; -1[\cup]2 ; +\infty[$

$f'(x) = \frac{-3}{(x+1)(x-2)}$.

$f(x) = x^2\ln x$ ؛ $D =]0 ; +\infty[$

$f'(x) = x(1+2\ln x)$.

• $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ ؛ $D = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

• $f(x) = 3x + \ln(1+e^{-2x})$ ؛ $D = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3 - \frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

• $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$ ؛ $D = \mathbb{R}^*$

$f'(x) = \frac{4e^{2x}}{e^{4x}-1}$.

• $f(x) = \ln(4x^2-3x-1)$ ؛

$D = \left]-\infty ; -\frac{1}{4}\right[\cup]1 ; +\infty[$

$f'(x) = \frac{8x-3}{4x^2-3x-1}$.

• $f(x) = x^2\ln(1+x)$ ؛ $D =]-1 ; +\infty[$

$f'(x) = 2x\ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x}$.

• $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ؛ $D =]0 ; +\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{2}\ln x\right)$.

15 $D = \mathbb{R}$ ؛ $a = -2$ ؛ $b = 5$.

$f(x) = -2 + \frac{5e^x}{2e^x+1}$.

الدالة F حيث $F(x) = -2x + \frac{5}{2}\ln(2e^x+1)$

المعرفة على $\mathbb{R}$ هي دالة أصلية للدالة f.

16 $a = 1$ ؛ $b = -4$ ؛ $f(x) = e^x - \frac{4e^x}{e^x+4}$.

الدالة الأصلية F للدالة f حيث $F(0) = 0$ معرفة

كما يلي $F(x) = e^x - 4\ln(e^x+4) - 1 + 4\ln 5$

17 $\left(\frac{\sqrt[6]{6}\,(\sqrt[3]{2})^2\,\sqrt{12}}{\sqrt[3]{3^4}\,\sqrt{\sqrt[3]{6^2}}}\right)^6 = \frac{2^9}{3^6}$ إذن $a = \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

$$a = \frac{6^{\frac{1}{6}} \times \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2 \times 12^{\frac{1}{2}}}{(3^4)^{\frac{1}{3}}\left[(6^2)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

18 $\sqrt[3]{8} = 2$ ؛ $\sqrt[4]{81^3} = 27$ ؛ $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt[5]{4^2}\,\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{8}} = 2^{\frac{1}{20}}$ ؛ $\frac{(\sqrt[3]{4})^2\,\sqrt[4]{2}}{\sqrt[10]{4^3}} = 2^{\frac{59}{60}}$

19

• مجموعة حلول المعادلة $4^x + 3\times2^x + 10 = 0$ هي $\varnothing$

• مجموعة حلول المعادلة $9^x - 3^{x+2} = \frac{3^5}{4}$

هي $\left\{\frac{\ln 27 - \ln 2}{\ln 3}\right\}$

• مجموعة حلول المعادلة

$\frac{1}{2}\cdot 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x}$ هي $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

• مجموعة حلول المعادلة $x^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{x}$ هي $\{1\}$

(يمكن الاعتماد على الحل البياني).

20 • $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ ؛ $D = \mathbb{R}_+^*$

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.

• $f(x) = 2^{x}$ ؛ $D = \mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = (\ln 2)\, 2^{x}$.

• $f(x) = x^{2}3^{x}$ ؛ $D = \mathbb{R}$

$f'(x) = x3^{x}(2 + x\ln 3)$.

• $f(x) = x^{x}$ ؛ $D = \mathbb{R}_+^*$ ؛ $f'(x) = (1 + \ln x)x^{x}$.

• $f(x) = (\ln x)^{x}$ ؛ $D = \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

$f'(x) = \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right)(\ln x)^{x}$ حيث $x > 1$.

• $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{x}$ ؛ $D =]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[$

$f'(x) = \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x+1}\right)\right]\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$.

21 • $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ؛ $D =]0 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 0$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f(x) = x^{\pi}$ ؛ $D =]0 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 0$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$ ؛ $D =]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = e$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 1$

$f(x) = \frac{x^{x}}{\ln x}$ ؛ $D =]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 0$ ؛ $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

22 الدالة F حيث $F(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ على $]0 ; +\infty[$.

الدالة F حيث $F(x) = \frac{2}{7}x^{3}\sqrt{x}$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = x^{2}\sqrt{x}$ على $]0 ; +\infty[$.

الدالة F حيث $F(x) = \frac{1}{\ln 5}.5^{x}$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = 5^{x}$ على $\mathbb{R}$.

23 • 1 $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

• 2 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = +\infty$

• 3 من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ؛

$$f'(x) = 2\left(\ln|x| + \frac{x-1}{x}\right)$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	‖ -	0	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	0	$\nearrow +\infty$ ‖ $+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$

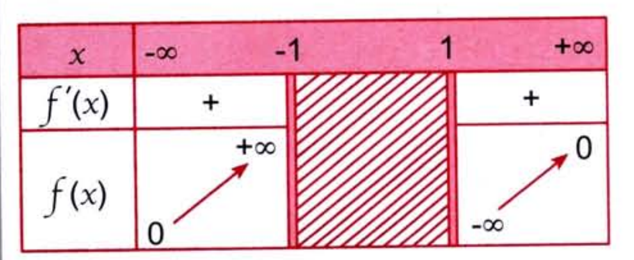
• 4 $f(x) = 0$ يعني $x = 1$ أو $x = -1$.

24 • 1. $D_f =]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$.

• 2 من أجل كل عدد حقيقي x من D_f ، $(-x) \in D_f$ و $f(-x) = -f(x)$. المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مركز تناظر و هو المبدأ O.

• 3 $x = 1$ ؛ $x = -1$ ؛ $y = 0$ هي معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathscr{C})$.

• 4 $f'(x) = \dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$



x	$-\infty$ -1	//////	1 $+\infty$
$f'(x)$	+	//////	+
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	//////	$-\infty \nearrow 0$

• 5 $(\Delta): y = \dfrac{2x}{(e-1)(e+1)} - \dfrac{2e}{(e-1)(e+1)} + \ln\left(\dfrac{e-1}{e+1}\right)$

25 • 1 f معرفة على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = 1 + \dfrac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}$

من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) > 0$

إذن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

• 2 $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1 + e^{3x}) = 0$

• 3 $f(x)$ من الشكل $ax + b + \varphi(x)$

حيث $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 4$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$.

• 4 من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$$f(x) = 4x - 4 + \ln(1 + e^{-3x})$$

(لاحظ أن $1 + e^{-3x} = \dfrac{e^{3x}+1}{e^{3x}}$ واستعمل خواص الدالة $\ln$).

• 5 $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-3x}) = 0$

• 6 المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = 4x - 4$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

26 •1 $E =]\ln\sqrt{2}\,;\,+\infty[$

• 2 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ؛ $\lim\limits_{\substack{x \to \ln\sqrt{2} \\ >}} f(x) = +\infty$

من أجل كل عدد حقيقي x من E ؛

$$f'(x) = \frac{-14e^{2x}}{(e^{2x}+5)(e^{2x}-2)}$$

x	$\ln\sqrt{2}$ $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	$+\infty \searrow 0$

• 3 $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ ؛ $g'(x) = f'(x) - 1$

الدالة g متناقصة تماما على E ؛ $\lim\limits_{\substack{x \to \ln\sqrt{2} \\ >}} g(x) = +\infty$

x	$\ln\sqrt{2}$ $+\infty$
$g(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا واحدا α حيث $\alpha > \ln\sqrt{2}$

المنحنى $(\mathscr{C})$ يقطع المستقيم ذا المعادلة $y = x$ في نقطة واحدة فاصلتها α حيث $\alpha > \ln\sqrt{2}$.

06 المتتاليات العددية

1 (u_n) هي متتالية أعداد موجبة.

.1 $u_0 = 2$ إذن $0 < u_0 < 3$

• نفرض أن من أجل عدد طبيعي n ؛ $0 < u_n < 3$

إذن $6 < u_n + 6 < 9$

$0 < \sqrt{6} < \sqrt{u_n + 6} < \sqrt{9}$ بالتالي $0 < u_{n+1} < 3$

• إذن من أجل عدد طبيعي n ؛ $0 < u_n < 3$

.2 $u_1 = \sqrt{u_0 + 6} = \sqrt{8}$ إذن $u_1 > u_0$.

• نفرض أن من أجل عدد طبيعي n ؛ $u_n > u_{n-1}$

$$u_{n+1}^2 = u_n + 6$$

$$u_n^2 = u_{n-1} + 6$$

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = u_n - u_{n-1}$$

بما أن $u_n - u_{n-1} > 0$ فإن $u_{n+1}^2 > u_n^2$

أي $u_{n+1} > u_n$.

• إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

2 (u_n) متتالية أعداد موجبة.

.1 $u_0 = 1$ إذن $u_0 < 2$.

• نفرض أن من أجل عدد طبيعي n ؛ $u_n < 2$.

نبرهن أن $u_{n+1} < 2$. $u_n < 2$ إذن $2 + u_n < 4$.

بالتالي $\sqrt{2 + u_n} < 2$. ينتج أن $u_{n+1} < 2$.

2. لدينا $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(2 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{2 + u_n} + u_n}$

هذا العدد موجب تماما من أجل كل عدد طبيعي n.

ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n < u_{n+1}$

بالتالي (u_n) متزايدة.

3 $u_0 = 9$ و $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$

.1 يمكن استعمال الاستدلال بالتراجع.

2. احسب الفرق $u_{n+1} - u_n$

و أدرس إشارة $-u_n^2 + u_n + 5$.

4 $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 2u_n - 3$

لاحظ أن $2u_n = 6 - 2^{n+1}$ و $2u_n - 3 = 3 - 2^{n+1}$

أي $u_{n+1} = 3 - 2^{n+1}$ (باستعمال الاستدلال بالتراجع)،

5 $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{4 + u_n}$

.1 لاحظ أن $u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{4 + u_n} = 1 - \dfrac{3}{4 + u_n}$

• نبرهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n \geq 0$. ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $1 - \dfrac{3}{4 + u_n} \leq 1$ أي $u_{n+1} \leq 1$.

2. الدالة $x \longmapsto \dfrac{3 + x}{4 + x}$ متزايدة على المجال [0,1].
(استعمال الدالة المشتقة).

3. المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

6 العدد $4^1 - 1$ مضاعف العدد 3.

$$4^{n+1} - 1 = 4\,(4^n) - 1$$
$$= (3+1)\,4^n - 1$$
$$= 3 \times 4^n + (4^n - 1)$$

7 العدد $7\times3^0 + 4$ يقبل القسمة على 11.

نفرض أن $7\times3^{5n} + 4$ يقبل القسمة على 11.

لدينا $7\times3^{5n+5} + 4 = 7\times3^{5n}\times3^5 + 4$

$$= 7\times3^{5n}\times 243 + 4$$
$$= 7\times3^{5n}\times(242+1) + 4$$
$$= (11\times22\times7\times3^{5n}) + (7\times3^{5n}+4)$$

ينتج أن العدد $7\times3^{5n+5} + 4$ يقبل القسمة على 11.

8 • الخاصية محققة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $4^n - 3n - 1$ يقبل القسمة على 9

لدينا $4(4^n - 3n - 1) = 4^{n+1} - 3(n+1) - 1 - 9n$

أي $4^{n+1} - 3(n+1) - 1 = 4(4^n - 3n - 1) + 9n$

نستنتج أن $4^{n+1} - 3(n+1) - 1$ يقبل القسمة على 9.

9 من أجل $n = 0$، $n^3 - n$ يقبل القسمة على 3.

لاحظ أن $(n+1)^3 - (n+1) = (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$

$$= 3k_1 + 3k_2 = 3k'$$

10 من أجل $n = 0$، $(1+a)^0 \geq 1$.

نفرض أن $(1+a)^n \geq 1 + na$ حيث n عدد طبيعي

لدينا $(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a)$

$$(1+an)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$$

11

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

12 لاحظ أن

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (n+1)^3$$
$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$
$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

13 $u_0 = 1$، $u_1 = 2$ و $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}$

لاحظ أن $u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}$

$$u_2 - u_1 = u_1 - u_0$$
$$u_3 - u_2 = u_2 - u_1$$
$$u_4 - u_3 = u_3 - u_2$$
$$\vdots$$
$$u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}$$

و بالجمع طرفا لطرف و التبسيط نجد

$$u_{n+1} - u_1 = u_n - u_0$$

أي $u_{n+1} = u_n + 1$

إذن • (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 1$ و أساسها $r = 1$.

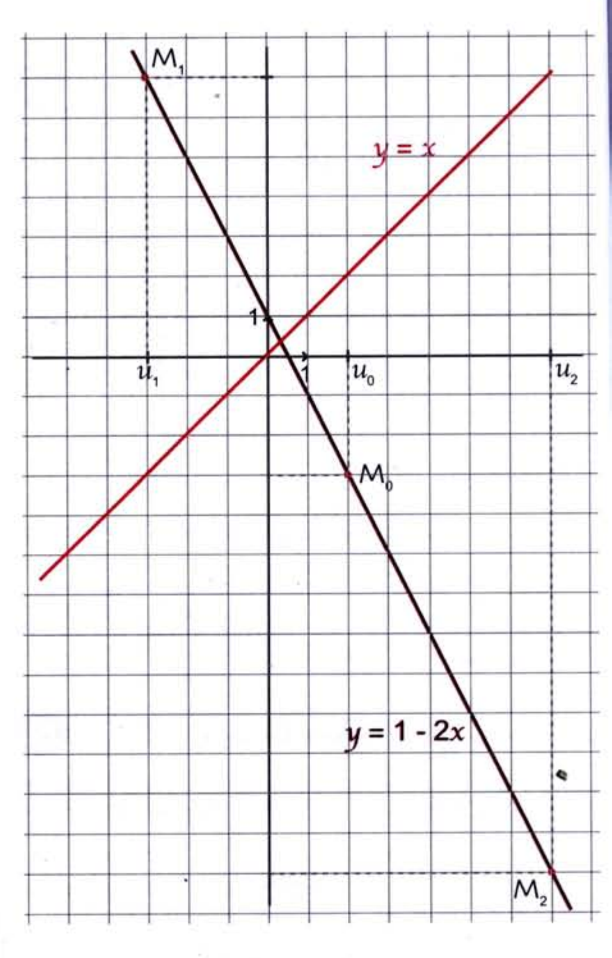
• من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n = n + 1$

• (u_n) متزايدة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

14 $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 1 - 2u_n$

$M_n(u_n ; u_{n+1})$ هي نقطة من التمثيل البياني.

$M_0(2 ; -3)$ ؛ $M_1(-3 ; 7)$ ؛ $M_3(7 ; -13)$ ؛ ...

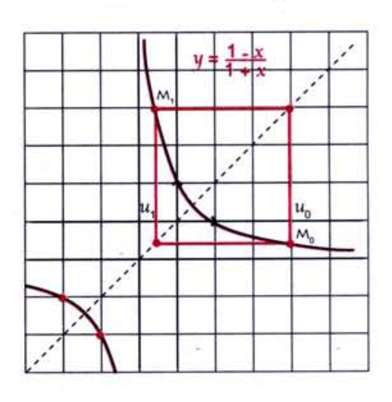


التخمين : المتتالية (u_n) ليست متقاربة.

حدود المتتالية (u_n) متناوبة في الإشارة و النقط M_n تبتعد أكثر فأكثر في الجهتين.

المتتالية (u_n) ليس لها نهاية.

15 $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \dfrac{1 - u_n}{1 + u_n}$



$M_0\left(3 ; -\dfrac{1}{2}\right)$ ؛ $M_1\left(-\dfrac{1}{2} ; 3\right)$

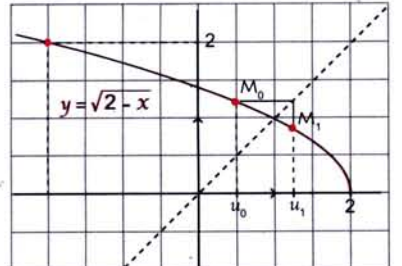
$M_2\left(3 ; -\dfrac{1}{2}\right)$ ؛ $M_4\left(-\dfrac{1}{2} ; 3\right)$

$u_n = 3$ من أجل n زوجي

$u_n = -\dfrac{1}{2}$ من أجل n فردي

التخمين : (u_n) ليس متقاربة و ليس لها نهاية.

16 $u_0 = \dfrac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$



$M_0\left(\dfrac{1}{2} ; \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$

$M_1\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}} ; u_3\right)$

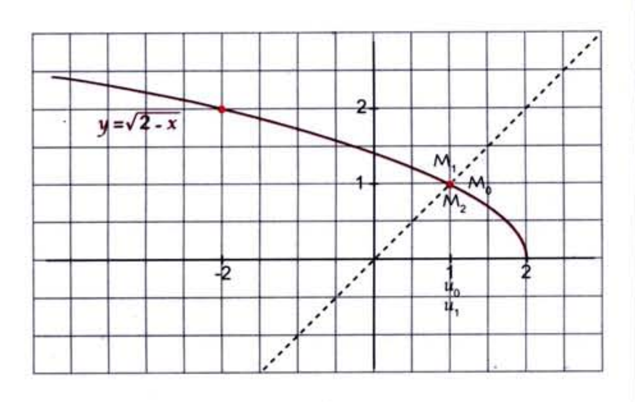
$M_2\left(u_3 ; u_4\right)$

(u_n) متقاربة و نهايتها ℓ تحقق $f(\ell) = \ell$

أي $\sqrt{2 - \ell} = \ell$ و نجد $\ell = 1$ إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

17 $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$

$M_0(1 ; 1)$ ؛ $M_1(1 ; 1)$ ؛ $M_2(1 ; 1)$... ؛ $M_2(1 ; 1)$



المتتالية ثابتة $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

18 .1 $\frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n}$

من أجل $n \geq 1$ ؛ $\frac{1}{n} \leq 1$ و $\frac{2}{n} \leq 2$

و بالتالي $1 \leq u_n \leq 3$ أي (u_n) محدودة.

.2 $u_n = \frac{n^2+1}{n}$

$= n + \frac{1}{n}$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$، $2 \leq u_n$

(u_n) محدودة من الأسفل.

.3 $u_n = \frac{n+3}{2n-1}$.

من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم ؛ $u_n \geq \frac{1}{2}$

و $u_0 = -3$. إذن (u_n) محدود من الأسفل بالعدد 3-.

19 .1 $u_n = \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n}$

من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم،

$0 < \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} < 1$.

إذن (u_n) محدودة.

.2 $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، $0 \leq \sqrt{n^2+1} - n$ و $u_n = f(n)$

إذن (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 0.

.3 $u_n = 4^n - 3^n$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، $0 \leq 4^n - 3^n$

(u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 0.

20 $u_0 = \frac{1}{7}$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + \frac{1}{2}$

نبرهن بالتراجع على $\mathbb{N}$ أن $u_n \leq \frac{3}{4}$.

21 $u_n = \frac{n+1}{n}$ ؛ (u_n) متناقصة و متقاربة

و $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

$v_n = -n$ ؛ (v_n) متناقصة و متباعدة

و $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

22 • $u_n = 2^{n-1}$. (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = \frac{1}{2}$ و أساسها $q = 2$. u_n متزايدة و غير متقاربة و $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

• $v_n = \frac{1}{3^{n-1}}$، (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 3$ و أساسها $q = \frac{1}{3}$. المتتالية (v_n) متناقصة و متقاربة و $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

23 • $u_n = \frac{-1}{2^{n-1}}$

(u_n) متزايدة و متقاربة و $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

• $v_n = (-2)^{n-1}$. المتتالية (v_n) غير رتيبة و متباعدة.

(v_n) ليس لها نهاية.

24 $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

.1 u_n من الشكل $u_n = f(n)$. من دراسة تغيرات f ينتج أن (u_n) متناقصة

(يمكن استعمال الإستدلال بالتراجع).

2 . (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل، فهي متقاربة و $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

25 1. $q = \frac{1}{3}$ و $u_0 = -2$. $0 < q < 1$

و $u_0 < 0$. إذن المتتالية الهندسية متناقصة.

2. $u_0 = \frac{1}{3}$ و $q = -\frac{\sqrt{1}}{3}$.

$q < 0$ إذن المتتالية (u_n) ليست رتيبة.

26 1. $v_0 = 1$ و $q = 2$

$v_0 > 0$ و $q > 1$ إذن المتتالية الهندسية (v_n) متزايدة.

2. $v_0 = -1$ و $q = -3$

$q < 0$ المتتالية الهندسية (v_n) ليست رتيبة.

27 1. $u_0 = 1$ و من أجل عدد طبيعي n ؛

$u_{n+1} = \sqrt{n+7}$. لاحظ أن $\sqrt{n+6} < \sqrt{n+7}$.

إذن (u_n) متزايدة.

2. $v_0 = 8$ و $v_{n+1} = \sqrt{3v_n + 1}$

باستعمال الاستدلال بالتراجع يمكن إثبات

أن (v_n) متناقصة.

28 $u_n = 1 + n + \sin n$

1. $n \le u_n \le 2 + n$

2 . المتتاليتان الحسابيتان (v_n) و (w_n) معرفتان كما يلي : $v_n = 2 + n$ و $w_n = n$

لدينا $\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = +\infty$

إذن $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

29 $u_n = \frac{n^4}{n!}$ حيث n عدد طبيعي.

من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n \ge 0$.

إذن (u_n) محدودة من الأسفل و متناقصة بدءا من u_3.

عند استعمال الإستدلال بالتراجع لاحظ أن $\frac{1}{n} < \frac{1}{n+1}$

إذن (u_n) متقاربة و $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

30 $u_0 = 2$ و $2u_n = u_{n+1} + 1$ و $v_n = u_n - 1$.

1 . نجد $v_{n+1} = 2v_n$. إذن (v_n) متتالية هندسية حيث $v_0 = 1$ و $q = 2$.

2 . لدينا $v_n = 2^n$.

إذن $u_n = 2^n - 1$

بما أن $\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ فإن $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

31 $u_0 = 3$ و $u_n = \frac{1}{3} u_{n-1} - 4$

1 . (u_n) متناقصة. (استعمال الاستدلال بالتراجع)

2 . $v_n = u_n + 6$ نبرهن أن $v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$.

حيث (v_n) متتالية هندسية. $v_0 = 9$ و $q = \frac{1}{3}$

و $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

3 . (v_n) متتالية هندسية مع $0 < q < 1$ و $v_0 = 9$

إذن $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$ و $\lim_{n \to +\infty} u_n = -6$.

32 $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ و $v_n = \frac{2n+2}{n+2}$

المتتالية (u_n) متزايدة لأن الدالة المرفقة بها متزايدة على $]0 ; +\infty[$. المتتالية (v_n) متناقصة لأن الدالة المرفقة بها متناقصة على $]0 ; +\infty[$.

$\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=2$ ؛ $u_n-v_n=\left(-\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}\right)$

إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n=2$$

33 $v_n=\frac{3n^2+4}{n^2+1}$ و $u_n=\frac{3n+4}{n+1}$

كل من (u_n) و (v_n) متناقصة.

إذن (u_n) و (v_n) غير متجاورتين.

34 $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)!}$

من أجل كل عدد طبيعي n، $\frac{1}{(n+1)!}>0$

إذن (u_n) متزايدة. $v_n=u_n+\frac{1}{n.n!}$

$$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}-u_n+\frac{1}{(n+1)(n+1)!}-\frac{1}{n.n!}$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)(n+1)!}-\frac{1}{n.n!}$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)(n+1)!}-\frac{n+1}{n.(n+1)!}$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{(n+1)(n+1)!}$$

و بعد التبسيط نجد $v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{(n+1)!n.(n+1)}$

إذن $v_{n+1}-v_n<0$ و بالتالي (v_n) متناقصة.

لدينا $v_n-u_n=-\frac{1}{n.n!}$ ؛ $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$

(u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة و $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$

إذن (u_n) و (v_n) متتاليتان متجاورتان.

35 $v_n=u_n+\frac{1}{n}$ و $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(k+1)^2}$$

$u_{n+1}-u_n>0$ إذن (u_n) متزايدة.

$$v_n=u_n+\frac{1}{n}$$

$$v_{n+1}-v_n=\left(u_{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(u_n+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\left(u_{n+1}-u_n\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{n-n-1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n-n-1}{n(n+1)^2}=\frac{-1}{n(n+1)^2}$$

$v_{n+1}-v_n<0$ إذن (v_n) متناقصة.

لدينا $v_n-u_n=\frac{1}{n}$ و $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$

إذن (u_n) و (v_n) متتاليتان متجاورتان.

36 .1 $u_0=1$ ؛ $u_1=6$ ؛ $u_2=13$

$u_3=24$ ؛ $u_4=41$

2 • 3 • نستعمل الإستدلال بالتراجع.

.4 $u_0=1$

$u_1=u_0+1^2-1+5$

$u_2=u_1+2^2-2+5$

$\vdots \quad \vdots$

$u_n=u_{n-1}+n^2-n+5$

$$(u_0+u_1+\ldots+u_{n-1})+u_n=1+(u_0+\ldots+u_{n-1})$$
$$+(1^2+2^2+\ldots+n^2)$$
$$-(1+2+\ldots+n)+5n$$

بعد التبسيط نجد :

$$u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + 5n$$

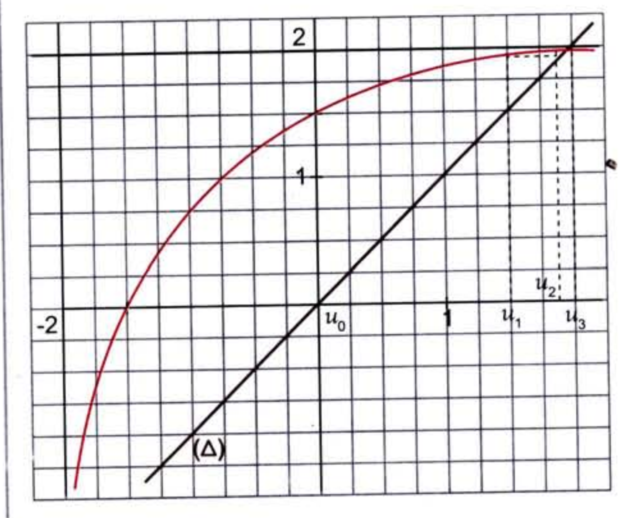
أي

$$u_n = 1 + 5n + \frac{(n-1)(n)(n+1)}{3}$$

5• $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ إذن (u_n) ليست متقاربة.

37 1. $u_0 = 0$ ؛ $u_1 = \frac{3}{2}$ ؛ $u_2 = \frac{12}{7}$ ؛ $u_3 = \frac{45}{26}$.

2• أ) - ب).



ج) المتتالية (u_n) متقاربة.

3• $u_{n+1} - u_n = \frac{3 - u_n^2}{u_n + 2}$

نبرهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛

$3 - u_n^2 > 0$ و أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛

$u_n + 2 \geq 0$

4• $u_{n+1} = 1 + \frac{1 + u_n}{2 + u_n}$

نلاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $0 \leq u_{n+1} \leq 2$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $0 \leq u_n \leq 2$.

5• (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى إذن (u_n) متقاربة.

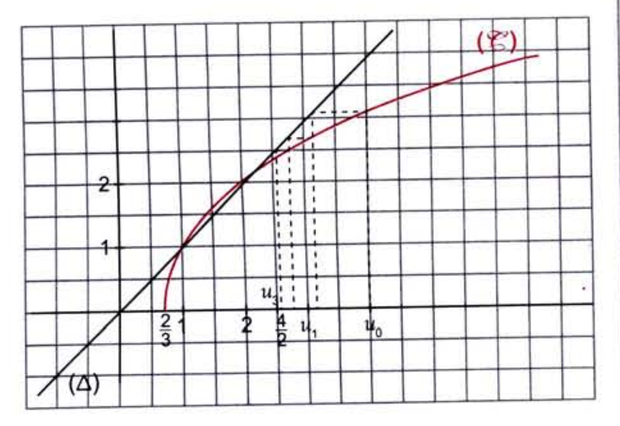
لإيجاد نهاية (u_n) عند $+\infty$، نحل المعادلة $\ell = f(\ell)$

و نجد $\ell = \sqrt{3}$.

38 1. $u_0 = 4$ ؛ $u_1 = \sqrt{10}$ ؛ $u_2 = \sqrt{3\sqrt{10} - 2}$

$u_3 = \sqrt{\sqrt{3\sqrt{10} - 2} - 2}$.

2• أ) - ب).



ج) المتتالية (u_n) متقاربة.

3• نثبت بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛

$u_n \geq 2$. لدينا $u_0 \geq 2$.

بفرض $u_n \geq 2$ ينتج أن $3u_n - 2 \geq 4$ أي $\sqrt{3u_n - 2} \geq 2$

4• من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{\sqrt{3u_n - 2} + u_n} \leq 0$$

و بالتالي $u_{n+1} - u_n \leq 0$. إذن (u_n) متناقصة.

5• (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل

إذن (u_n) متقاربة.

6• $\ell = 2$.

07 الحساب التكاملي

1 $\int_{-1}^{2}(x^2+x)\,dx=\frac{9}{2}$ ؛ $\int_{2}^{4}\frac{1}{x}\,dx=\ln 2$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ؛ $\int_{-3}^{-1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=-\frac{2}{3}$

$\int_{4}^{9}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=2$ ؛ $\int_{-3}^{-1}(t+3)^3\,dt=4$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)dx=\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\cos^3\theta\,d\theta=\frac{1}{8}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,e^{\cos x}dx=-1+e$$

$\int_{0}^{1}\frac{2x}{4-x^2}\,dx=\ln\frac{4}{3}$ ؛ $\int_{e}^{e^2}\frac{1}{x\ln x}\,dx=\ln 2$

$\int_{e}^{e^2}\frac{\ln x}{x}\,dx=\frac{3}{2}$ ؛ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=\frac{\pi}{4}$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{\pi}{4}$$

2 1. $\alpha=\frac{1}{2}$ ؛ $\beta=-\frac{1}{2}$

2. $$\int_{e}^{1}f(x)\,dx=\left[\frac{1}{2}\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln|x+2|\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{2}\ln 3$$

3 1. وحدة المقامات و بسط العبارة.

2. $$\int_{0}^{2}\frac{1}{x^2-2x-3}\,dx=\left[\frac{1}{4}\left(\ln|x-3|-\ln|x+1|\right)\right]_0^2$$
$$=-\frac{1}{2}\ln 3$$

4 1. $a=1$ ؛ $b=-1$

2. $$\int_{1}^{2}\frac{1}{x(x+1)}\,dx=\left[\ln|x|-\ln|x+1|\right]_1^2$$
$$=\ln\frac{4}{3}$$

5 $\alpha=1$ ؛ $\beta=-1$ ؛ $\gamma=1$

$$\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2(x+1)}\,dx=\left[-\frac{1}{x^2}-\ln|x|-\ln|x+1|\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{4}$$

6 1. $I_1+I_2=x$ ؛ $I_1-I_2=\frac{1}{2}\sin 2x$

2. $I_2=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$ ؛ $I_1=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x$

3. $\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}$ ؛ $\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}$

(استعمل العلاقتين السابقتين).

7 $\int_{-1}^{3}|x-2|dx=5$ ؛ $\int_{-2}^{4}|x^2-4|dx=\frac{64}{3}$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,dt=2$ ؛ $\int_{\frac{1}{2}}^{2}|2-\frac{2}{x}|dx=1$

8 1. $$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(-2t-1)\,dt=\frac{1}{4}$$
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(2t+1)\,dt=\frac{25}{4}$$

2. $$\int_{-1}^{2}|2t+1|dt=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(-2t-1)dt+\int_{-\frac{1}{2}}^{2}(2t+1)dt$$
$$=\frac{13}{2}$$

9 1. $0\le x\le 1$ ؛ $\int_{1}^{x}(t-1-\ln t)\,dt\le 0$

$x\ge 1$ ؛ $\int_{1}^{x}(t-1-\ln t)\,dt\ge 0$

2. من أجل كل عدد حقيقي t موجب تماما :

$$\left(\frac{1}{2}t^2-t\ln t\right)'=t-1-\ln t$$

$$\int_{1}^{x}(t-1-\ln t)\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2-t\ln t\right]_1^x$$
$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}-x\ln x$$

10

1. $\mathcal{U} = 3 - 2e$ ؛ 2. $\mathcal{U} = -1$

3. $\mathcal{U} = \frac{1}{8}\left(\frac{e^2 - 7}{e - 1}\right)$ ؛ 4. $\mathcal{U} = 0$

5. $\mathcal{U} = \frac{14}{5}$ ؛ 6. $\mathcal{U} = -6$

7. $\mathcal{U} = \frac{1}{2}$ ؛ 8. $\mathcal{U} = \frac{1}{2}$

11

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt = \frac{\pi}{2} - 1$ ؛ $\int_0^1 (3-t)e^t dt = 3e-4$

$\int_0^{\pi} (3x+2)\sin x\,dx = 3\pi + 4$

$\int_0^{\pi} (-x+3)\cos x\,dx = 2$

$\int_1^{x} t\ln t\,dt = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$

$\int_1^{x} \ln t\,dt = x\ln x - x + 1$

$\int_0^{2} xe^x dx = e^2 + 1$ ؛ $\int_0^{1} \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$

$\int_1^{e} \frac{\ln t}{t^2}dt = 1 - \frac{2}{e}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x-1)\sin(2x^2 - x)dx = -\cos\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

12

$\int_0^1 t^2e^t dt = e - 2$

$\int_0^1 (3t^2 - t + 1)e^t dt = 4e - 8$

$\int_0^1 t^2e^{3t} dt = \frac{5e^3 - 2}{27}$

$\int_0^{\pi} e^t\cos t\,dt = -\frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$ ؛ $\int_0^{\pi} e^t\sin t\,dt = \frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x\,e^{2x}dx = \frac{3}{13}(e^{-\pi} - e^{\pi})$

$\int_0^{e^2} \sqrt{x}\ln x\,dx = \frac{8}{9}e^3 + \frac{4}{9}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\sin 2t\,dt = \frac{1}{8}\pi^2 - \frac{1}{2}$

13

2. $A = \frac{25}{4}\,cm^2$

14

2. $A = \int_1^e [g(x) - f(x)]dx$

$= e^{e-1} - 2$

15

2. $\mathcal{A}(a) = -(a+1)e^{-a} + 1$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[-(a+1)e^{-a} + 1\right] = 1$

16

إذن $r = MH = \frac{R(h - z)}{h}$

$v = \int_0^h S(z)\,dz = \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2}(h - z)^2 dz = \frac{\pi h R^2}{3}$

17

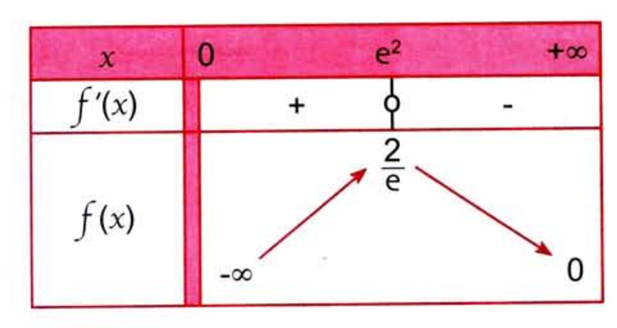
2. $\int_2^3 \ln(x - 1)\,dx = 2\ln 2 - 1$

3. $\int_2^3 \ln(x + 1)\,dx = 8\ln 2 - 3\ln 3 - 1$

4. $\mathcal{A} = \left(\ln\frac{64}{27}\right)cm^2$

18

$f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x^2}(2 - \ln x)$



x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{2}{e}$	↘	0

2. $A = \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^{e^2} - 2\left[2\sqrt{x}\right]_1^{e^2} = 4$

19

1. على المجال $[1 ; m]$: $f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$

$\mathcal{A}(m) = \int_1^m \frac{\ln x}{x^2}dx = 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{m}\ln m$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathcal{A}(m) = 1$

20 1. $f'(x) = 4(1-x)\,e^{-2x}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	e^{-2}	↘ 0

3. $\mathcal{A}(\lambda) = \frac{1}{2e} - \lambda e^{-2\lambda}$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \frac{1}{2e}$$

4. من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $H'(x) = h(x)$

إذن H دالة أصلية لـ h على $\mathbb{R}$.

5. $v = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left|f(x)\right|^2 dx = \frac{\pi}{8}\left(5e^2 - e^{-2}\right)$

إذن $v = \frac{\pi}{8}\left(5e^2 - e^{-2}\right) \approx 18{,}4\ \text{cm}^3$

21 1. f معرفة عند 0

و $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = f(0)$.

إذن f مستمرة عند 0.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$$

إذن f ليست قابلة للاشتقاق عند 0.

2. $f'(x) = 1 + \ln x$ على $]0\,;+\infty[$.

$f'(x) = 1 + \ln(-x)$ على $]-\infty\,;0[$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{e}$		0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{1}{e}$	↘	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗ $+\infty$

3. على المجال $\left[\frac{1}{e}\,;1\right]$ ، $f(x) \le 0$.

إذن $\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{e}}^{1} (-x\ln x)\,dx = \int_{1}^{\frac{1}{e}} x\ln x\,dx$

أي $\mathcal{A} = -\frac{3}{4e^2} + \frac{1}{4}$

$\approx 0{,}148$

22 1. $f(x) = -x\ln x$ على المجال $]0\,;1]$

$f(1) = 0$

$f(x) = x\ln x$ على $]1\,;+\infty[$

$f(1) = 0$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$

إذن f مستمرة عند 0 عن اليمين و عند 1

و بالتالي f مستمرة على $[0\,;+\infty[$.

f ليست قابلة للاشتقاق عند 0 عن اليمين.

f ليست قابلة للاشتقاق عند 1 و بالتالي f لا تقبل الإشتقاق على $[0\,;+\infty[$.

ملاحظة : f قابلة للاشتقاق على $]0\,;1[$ و $]1\,;+\infty[$

2. $f'(x) = -1 - \ln x$ على المجال $]0\,;1[$

$f'(x) = 1 + \ln x$ على المجال $]1\,;+\infty[$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0	↗	$+\infty$

3. على المجال $]0\,;1]$ ؛ $f(x) \ge 0$.

إذن $\mathcal{A}(t) = \int_{t}^{1} f(x)\,dx$

$= \frac{1}{2}t^2\ln t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}$

$\lim_{t \overset{>}{\to} 0} \mathcal{A}(t) = \frac{1}{4}$

كتاب الرياضيات من سلسلة مدرستي موجه إلى تلاميذ السنة الثالثة من التعليم الثانوي، شعبة العلوم التجريبية. فهو يتماشى مع المنهاج الرسمي المقرر تطبيقه ابتداء من سبتمبر 2007 و يتكفل بالكفاءات القاعدية و الكفاءات الرياضية المصرح بها.

يتضمن كل باب من هذا الكتاب العناصر التالية :

- المعارف الأساسية الواردة في المنهاج.
- الطرائق التي ينبغي التحكم فيها.
- تمارين و مسائل مرفقة بحلول مفصلة.
- تمارين و مسائل مقترحة للحل، توجد حلولها في الصفحات الأخيرة للكتاب.

يشمل هذا الجزء أكثر من 220 تمرينا و مسألة محلولة.

كما نلفت الانتباه إلى وجود أكثر من 460 تمرينا و مسألة محلولة في الجزأين من الكتاب، تساعد المترشح لامتحان الباكالوريا على التحضير الجيد.


9 789961 635902



أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي

و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.



Hard_equation